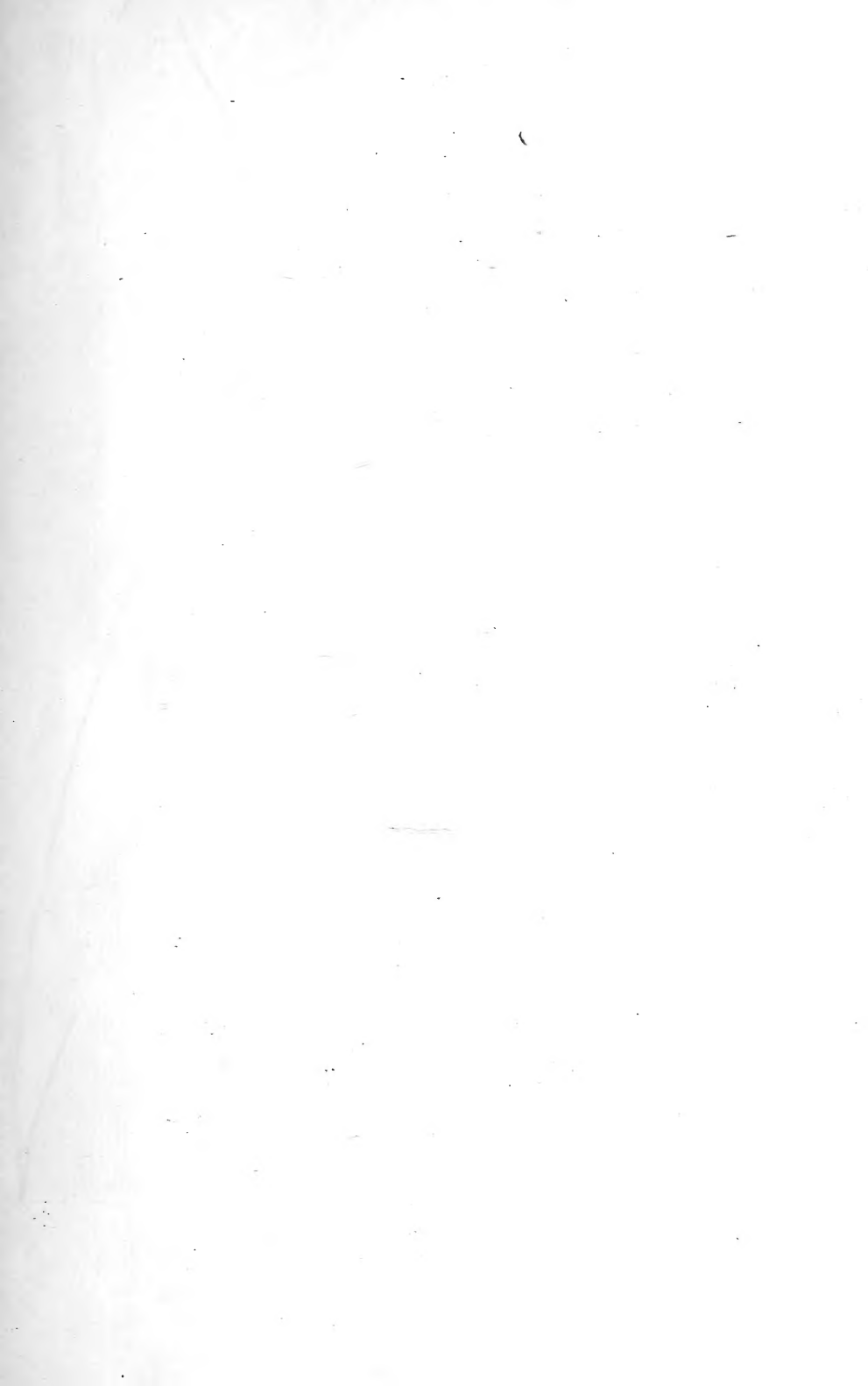


251.7

Library of the Museum
OF
COMPARATIVE ZOÖLOGY,
AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.
Founded by private subscription, in 1861.
~~~~~  
Deposited by ALEX. AGASSIZ.

No. 7026.  
Feb. 20, 1885 - Apr. 28, 1886.







# Archiv

for

## Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

**Sophus Lie, Worm-Müller og G. O. Sars.**

---

Tiende Bind.



**Kristiania.**

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

*Sm* Marts 1886.

Det Mallingske bogtrykkeri.

# Indhold.

|                                                                                                       | Side    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>Jac. G. Otto.</i> En legalundersøgelse med nogle bemærkninger . . . . .                            | 1—15    |
| <i>J. H. L. Vogt.</i> Norske ertsforekomster:                                                         |         |
| III. Om den Thelemark-Sætersdal'ske ertsformation . . . . .                                           | 16—59   |
| IV. De sølvertsførende gange ved Svenningdalen<br>(Vefsen) . . . . .                                  | 60—73   |
| <i>Sophus Lie.</i> Untersuchungen über Transformationsgruppen I . . . . .                             | 74—128  |
| <i>Karl Pettersen.</i> De norske kyststrøgs geologi. IV. . . . .                                      | 129—180 |
| <i>Axel Thue.</i> Om størrelsesbegreberne areal og volum . . . . .                                    | 181—188 |
| <i>Amund Helland.</i> Kongsbergs sølvværks drift før og nu . . . . .                                  | 189—289 |
| <i>Elling Holst.</i> Ueber die praktische Integration rationaler Bruch-<br>funktionen . . . . .       | 290—295 |
| <i>Jac. G. Otto.</i> Die neueren Untersuchungen über das Hämoglobin<br>und das Methämoglobin. . . . . | 296—303 |
| <i>Axel Thue.</i> Et bidrag til den absolute geometri . . . . .                                       | 304—328 |
| <i>Andr. M. Hansen.</i> Om seter eller strandlinjer i store høider<br>over havet . . . . .            | 329—352 |
| <i>Sophus Lie.</i> Untersuchungen über Transformationsgruppen II . . . . .                            | 353—413 |
| <i>Amund Helland.</i> Svenske geologer om indsjørne . . . . .                                         | 414—455 |

---



# En Legalundersøgelse med nogle Bemærkninger.

Af

Amanuensis JAC. G. OTTO.

(Meddelelse fra Universitetets fysiologiske Institut).

Ved Teichmanns Opdagelse i 1853 af de siden efter ham benævnte Hæminkrystallers Dannelse af Blod ved Indvirkning af Iseddike berigedes den retsmedicinske Analyse med en Methode til Paavisning af Blodflekker, hvis Værd ikke kan skattes for høit. Teichmann hentydede allerede selv i Originalafhandlingen over sin Iagttagelse til den store praktiske Betydning, den kunde faa, og dette blev nogle Aar efter paa det mest slaaende bekræftet og udvidet af Brücke, Virchow, Büchner & Simon samt Erdmann. Ved deres Arbejder var paa en ganske kort Tid Methoderne til den forensiske Paavisning af Blodflekker hævede til en Sikkerhed, der fuldstændig stillede dem i Klasse med de fineste analytiske Metoder og gjorde Undersøgelsen paa Blodspor, der før havde ladet særdeles meget tilbage at ønske, til et forholdsvis meget simpelt og særdeles paalideligt Foretagende. Vistnok reiste der sig her som altid flere Stemmer mod den nye Prøve; men denne bestod mod alle Angreb og er den Dag i Dag det bedste Middel, man kjender til Paavisning af Blod. For dem, der maatte ønske nærmere at sætte sig ind i den herhen hørende Literatur, hidsættes her de vigtigste Originalarbejder over de Teichmannske Krystaller med den Bemærkning, at der vistnok

kunde anføres langt flere Forfattere; men de citerede er ikke alene de, der har leveret de væsentligste Bidrag, men alt, hvad der desforuden er skrevet, indeholder i Virkeligheden intet methodisk Nyt, saa der i den følgende Literaturfortegnelse vil findes alt, hvad der er værd at vide om Hæminkrystallernes Fremstillingsmaade i de forskjellige Tilfælde, og deres Værd for Diagnosen af Blodpletter:

- 1) *Teichmann*, Zeitschr. f. rationelle Medicin, N. F., Bd. 3, 1853, S. 375.
- 2) *Brücke*, Wiener medicinische Wochenschrift 1857, No. 23.
- 3) *Virchow*, Archiv für pathologische Anatomie etc. Bd. XII, 1857, S. 334.
- 4) *Büchner und Simon*, Archiv für pathologische Anatomie etc. Bd. XV, 1858, S. 50.
- 5) *Landerer*, Ueber die Teichmannschen Hæmatin-Krystalle, Arch. d. Pharmacie CL, 1859, S. 275.
- 6) *Erdmann*, Journal für praktische Chemie, Bd. 85, 1862, S. 1.
- 7) *Sonnenschein*, Handbuch der gerichtlichen Chemie. Neu bearbeitet von Alexander Classen, Berlin 1881, S. 322.
- 8) *Otto*, Anleitung zur Ausmittelung der Gifte und zur Erkennung der Blutflecken etc. 4. Aufl. Braunschweig 1870, S. 110.
- 9) *Casper*, Praktisches Handbuch der gerichtlichen Medicin. Neu bearbeitet von Liman, 6te Aufl. 2. Band, Berlin 1876, S. 173.
- 10) *Hoffmann*, Vierteljahrschrift für gerichtliche Medicin und öffentliches Sanitetswesen, N. F. XIX. Band, 1873, S. 137.
- 11) *v. Gorup Besanez* Lehrbuch der physiologischen Chemie, 4te Aufl., Braunschweig 1878, S. 374.

Hvad der gjør Hæminprøven saa ualmindelig praktisk og sikker er fremfor alt, at der kun behøves et minimalt Spor af Blod for at fremstille Hæminkrystallerne, og at

Blodets Alder er ligegyldig, naar Blodflekken kun er *frisk indtørret*. Som Bevis herpaa kan f. Ex. anføres, at Scriba i 1860 kunde fremstille de Teichmannske Kry-staller af Blod indtørret paa Papir fra en i 1820 hen-rettet Forbryder.

At der imidlertid kan forekomme Tilfælde, hvor Hæmin-prøven slaar Feil, uagtet den notoriske Tilstedeværelse af Blod, og at der ofte maa en ganske speciel Fremgangsmaade til, for at Reaktionen skal lykkes, har længe været kjendt, og man har derfor ogsaa strebt at udfinde de Betingelser, der maa fyldestgøres for at skaffe Methoden en absolut almindelig Gyldighed. Dette gjelder især for Paavisning af Blod i Flekker, der har været blandede med Ler eller Jern-rust, fordi Hæmatinet indgaar en i Vand uopløselig Forbin-delse med Jern- og Aluminiumoxyd, hvoraf Hæminkrystal-lerne enten slet ikke eller i alle Fald kun vanskelig lader sig fremstille.

Et Tilfælde, hvor det var forbundet med adskillige Vanskeligheder at paavise Blodet ved Hjælp af Hæmin-prøven, uagtet der endnu var uforandrede Blodlegemer til-stede, havde jeg for nogen Tid siden Anledning til at iagt-tage, idet der var Spørgsmaal, om der paa en rusten Øxe fandtes Blodflekke.

Paa Grund af Sagens store Interesse har jeg derfor noget nærmere studeret dette Forhold med specielt Hensyn paa det foreliggende Tilfælde, og da jeg tror at have fun-det en Forklaring til de optrædende Fænomener, skal jeg først meddele Faktum og derpaa knytte nogle Bemærknin-ger til Diskussionen af Resultaterne.

Øxen var ved Modtagelsen paa begge Sider af Æggen bedækket af et tyndt rustbrunt — mørkebrunt Lag, som paa den ene Side nedadtil skar noget mere i det purpur-røde; paa Øxehammeren fandtes ligeledes to rustbrune, ærte-store Pletter, medens Skaftet var fuldstændig frit for saa-

danne. Den mistænkelige Masse afskrabedes med et blankt Hugjern, pulveriseredes fint og undersøgtes derpaa paa nedenstaaende Maade. Det bemærkes, at Pulveret fra Æggen og fra Øxehammeren undersøgtes hvert for sig.

*Pulveret fra Æggen.*

- 1) En liden Prøve af samme ophededes forsigtig i et tørt Reagensglas, hvorved Massen forkulledes under Udvikling af Ammoniak.
- 2) En minimal Mængde bragtes paa et Objektglas, tilsattes et Spor Kogsalt, bedækkedes med et Dækglas og blandedes med nogle Draaber Iseddike ved at lade denne ved Hjælp af en Glasstav flyde til Prøven fra Dækglassets Rand. Ved at bevæge dette lidt frem og tilbage frembragtes en muligst intim Blanding. Det hele opvarmedes derpaa langsomt over en liden Flamme, til der begyndte at vise sig Gasblærer og henstod siden i Ro ca. 1 Time, hvorpaa Præparatet undersøgtes mikroskopisk ved 350 Ganges Forstørrelse. Til Trods for den nøiagtigste Undersøgelse af alle Dele af samme og flere Ganges fornyet Tilsætning af Iseddike, Opvarmning og Henstand kunde jeg ikke opdage nogetsomhelst, der havde Lighed med Hæminkrystaller.
- 3) Den under 2 beskrevne Prøve gjentoges, alene med den Forskjel, at der efter Tilsætning af Iseddike ikke opvarmedes; men Præparatet henstod 24 Timer ved almindelig Temperatur før Undersøgelsen. Resultatet som i 2.
- 4) En Prøve af Pulveret tilsattes 24 Timer med en 10 pCt.s Jodkaliumopløsning. Vædsken, der havde antaget en gulagtig Farve og ikke gav nogensomhelst spektroskopisk Reaktion paa Blod, frafiltreredes og tilsattes en koncentreret Opløsning af eddikesurt Zink. Herved erholdtes et svagt gulagtigt Bundfald, der fra-



filtreredes paa et meget lidet Filter, udvadskedes, tørredes under Luftpumpen og derpaa behandledes som i 2. Ved den mikroskopiske Undersøgelse saa jeg et Par Legemer, som havde stor Lighed med Hæminkrystaller, uden at jeg dog med Bestemthed tør afgjøre, hvorvidt det virkelig var Hæmin.

- 5) Samme Resultat havde et Forsøg, hvor jeg behandlede Pulveret med 4 %'s Natronlud, filtrerede, fældte Filtratet med Garvesyre og anvendte det udvadskede og tørrede Bundfald som nævnt i 4.
- 6) Ved Extraktion af Pulveret med Vand og Inddampning af Udtrækket beholdtes saagodtsom intet Residuum, der forholdt sig fuldstændig negativt ved Hæminprøven.
- 7) En Del af Pulveret behandlede i 24 Timer med Vand, tilsat en Draabe 4 %'s Natronlud ved 30 ° C. Opløsningen filtreredes, inddampedes under Luftpumpen og Residuet anvendtes til Hæminprøven efter Udrøring med en Draabe Vand. Denne Gang beholdtes fuldt positivt Resultat, idet Mikroskopet viste en god Del smaa brunsorte Krystaller af den for Hæmin karakteristiske Form, dels liggende enkeltvis, dels samlede i større Grupper. Ved Tilsætning af en Draabe Natronlud fra Randen af Dækglasset opløstes de med grønlig Farve. Opløsningen viste sig ved den mikro-spektroskopiske Undersøgelse efter Tilsætning af en Draabe Svovl-ammonium for fortyndet til at give nogen Spektralreaktion. Gjentagelse af Forsøget havde samme Resultat.
- 8) En Prøve af Pulveret tilsattes paa et Objektglas nogle Draaber 30 %'s Natronlud og henstod dermed et Par Timer. Den mikroskopiske Undersøgelse af dette Præparat viste en Del uforandrede cirkulære Blodceller, men for Størsteparten sexkantede, næsten polygonale Legemer eller Stjerner samt enkelte kornede Rester.

I Mikroskopets Synsfelt kunde jeg tælle 3 cirkulære Blodlegemer i heldigste Tilfælde. En mikroskopisk Maaling af deres Diameter gav Værdier fra 9 til  $10.6 \mu$ . Dette er noget høit for Menneskeblodlegemer, men kan muligens forklares ved, at de svulmer op i Natronlud.

- 9) En muligst stor Mængde af Pulveret behandlede i 24 Timer med lidt 4 %'s Natronlud; Opløsningen, der havde et rødligt-grønligt Skjær, frafiltreredes og undersøgte efter Tilsætning af en Draabe Svovlammonium mikrospektroskopisk i 1 Cm. tykt Schicht. Derved erholdtes en tydelig om end meget svag Reaktion paa Hæmochromogen, idet den karakteristiske Absorptionsstribe mellem D og E i Solspektret traadte utvetydig frem. Ved Rystning med Luft og fornyet Undersøgelse var den forsvunden, men vendte efter kort Henstand atter tilbage.

For Kontrollens Skyld har jeg paa ovenstaaende Maade undersøgt paa den ene Side Jernrust fra en Ovn, paa den anden Blodflekker, afskrabede af et Operationsbord og antagelig et Par Maaneder gamle. Jernrusten gav ved alle Prøver et afgjort negativt Resultat, medens Blodflekken forholdt sig fuldt positivt med Undtagelse maaske af Prøverne 4 og 5. De af Blodflekken ved Prøve 8 erholdte Blodlegemer viste specielt samme Former som de i Undersøgelsen fundne, medens Størrelsen af Diameteren var noget mindre, nemlig  $8.8 - 9.2 \mu$ .

Det fra *Øxehammeren* afskrabede Pulver forholdt sig ved alle Prøver negativt.

Af ovenstaaende maa med Bestemthed slutes, at der paa *Øxens Æg* fandtes Blod, og Spørgsmaalet bliver nu, hvorfor der kun ved Prøve No. 7 erholdtes fuldt karakteristiske Hæminkrystaller, medens Undersøgelsen paa uforandrede Blodlegemer efter 8 strax lykkedes. For om muligt at klargjøre dette, har jeg anstillet nogle Forsøg over Paa-

visning af Blodflekker paa Jern, hvis Resultat jeg i det følgende skal meddele. Der angives i Almindelighed, at Hæminprøven vanskeligjøres:

- 1) Naar Blodflekken er for stærkt tørret,
- 2 Naar den er oversmurt med let forraadnende Materier (Urin, Fæcaltmasser), eller
- 3) Naar Blodflekker paa rustent Jern er for gamle, fordi da Hæmatinet har indgaaet en Forbindelse med Jernrusten, hvoraf Hæminkrystallerne ikke (eller i hvert Fald kun yderst vanskelig) lader sig fremstille.

Det første af disse Momenter, især fremhævet af Blondlot\*), kan vel vanskelig have været Aarsagen i nævnte Tilfælde, da det for det første er urimeligt at antage, at Øxen skulde have været udsat for nogen højere Temperatur, og for det andet taler Fundet af Blodlegemerne direkte herimod, idet disse i saa Fald maatte være destruerede. Uagtet jeg saaledes ikke kunde tillægge dette Forhold nogen Betydning her, har jeg dog gjort nogle Forsøg derover og er derved kommen til Resultater, der har bragt mig til at tvivle meget paa, at det i sin Almindelighed er rigtigt, at stærkt tørret Blod ikke eller kun vanskeligt giver Hæminreaktionen. Uden at gaa nærmere ind paa de enkelte specielle Undersøgelser skal jeg kun bemærke, at jeg altid har kunnet fremstille rigelige Mængder Hæminkrystaller af Blod eller Hæmoglobin, som var tørret ved 100—115°, ja at Reaktionen ikke en eneste Gang i et saadant Tilfælde har slaaet Feil\*\*). Dette synes imidlertid kun at gjælde saalænge Blodet alene har været i Berørelse med Glas, Por-

---

\*) Chemische Centralblatt 1868, S. 750.

\*\*\*) Hoffman (Vierteljahrschrift für ger. Medicin, 1873, S. 143) angiver, at det «wiederholt» er lykkedes ham at fremstille Hæminkrystaller af Blod, som var indtørret ved Koghede og anbefaler i saadanne Tilfælde at behandle Flekken med en Blanding af Ammoniak og absolut Alkohol, derpaa rive Massen sammen med kulsur Kali og endelig udtrække med absolut Alkohol. Jeg har imidlertid ikke

cellæn eller blankt, metallisk Jern under Indtørringen; saasnart derimod denne er skeet under Tilstedeværelse af Rust bliver *Prøven usikker*, hvilket jeg mange Gange har overbevist mig om; thi vistnok lykkes ogsaa ofte da Fremstillingen af de karakteristiske Hæminkrystaller, men mislykkes ligesaa ofte, saa det under saadanne Omstændigheder ikke bliver noget fuldgyldigt Bevis mod Tilstedeværelsen af Blod, at Hæminprøven giver negativt Resultat. Dette beror rimeligvis paa, at der under Indtørringen ved Tilstedeværelse af Rust har dannet sig den før omtalte Forbindelse mellem Hæmatin og Jernoxyd, hvoraf Hæminet vanskelig eller maaske slet ikke lader sig fremstille.

Naar jeg ovenfor har sagt, at det stadig er lykkedes mig at paavise Blod, indtørret ved høiere Temperatur paa Glas, Porcellæn eller blankt Jern ved Hæminreaktionen, maa jeg hertil føie, at dette kun med Sikkerhed lader sig gjøre ved enten at anstille Prøven direkte paa den afskrabede og pulveriserede Masse eller ved at anvende fortyndet Ammoniak eller Natronlud som Extraktionsmiddel og benytte det inddampede Udtræks Residuum til Reaktionen. Vand duer under saadanne Omstændigheder ikke til at opløse Flekken i, og ogsaa de øvrige sædvanlige Extraktionsmidler har ofte slaaget Feil for mig, saa deraf kan maaske den gjængse Mening forklarss.

Saasnart Blod blandet med Rust er indtørret ved høiere Temperatur er som sagt Hæminprøven ikke længere fuldt paalidelig. Det bedste Resultat i saadanne Tilfælde har jeg opnaaet ved Extraktion med meget fortyndet Natronlud ved svag Varme og Benyttelse af det inddampede Udtræk til Hæminfremstillingen. Uagtet dette heller ikke holder Stik under alle Omstændigheder, har jeg dog anført det,

---

kunnet overbevise mig om Nyttens af denne komplicerede Fremgangsmaade; men har faaet langt bedre Resultater ved simpelthen direkte at anvende den afskrabede Masse til Hæminfremstillingen.

fordi det kunde forklare Resultatet af den omhandlede Øxes Undersøgelse under den Forudsætning, at denne var opvarmet til en noget højere Temperatur, idet som vist under 7 Fremstillingen af Hæminkrystallerne i det nævnte Tilfælde kun lykkedes ved Extraktion af Flekken med meget fortyndet Natronlud. At jeg alligevel ikke kan antage, at en saadan Ophedning har fundet Sted fremgaar af, hvad jeg S. 7 har anført om de uforandrede Blodlegemer.

Hvad endelig den af Blondlot angivne og siden af forskjellige Forfattere accepterede Anskuelse, at forraadnet Blod ikke skulde egne sig til Fremstilling af Hæminkrystaller, angaar, saa er denne allerede modbevist af Simon og Büchner samt Falck; hvorfor jeg ikke nærmere skulde have gaaet ind paa Sagen, hvis det ikke var tænkeligt, at ogsaa her Tilstedeværelsen af Jernrusten havde kunnet modificere Forholdet. Jeg har af den Grund gjort en Del Forsøg med Blodflekker paa rustent Jern, der i nogen Tid blev holdt fugtige ved Hjælp af Urin eller vaade Excrementer og derpaa indtørrede. Det viste sig da, at det ofte ikke er forbundet med ganske faa Vanskeligheder at faa en karakteristisk Reaktion paa en saadan Flek ved Hjælp af Hæminprøven, men det er dog altid lykkedes mig. Imidlertid var det umuligt i saadanne Fald saavel at anvende Pulveret direkte som et vandigt Udtræk af samme, hvori- mod en meget fortyndet Natronlud stedse gav et godt Resultat, naar den kun fik indvirke i noget længere Tid. Overhovedet tror jeg, det ikke stærkt nok kan betones, at man ved Extraktion af mistænkelige Blodflekker — det være sig med hvilket som helst Opløsningsmiddel — maa lade vedkommende Vædske virke temmelig lang Tid (ca. 24 Timer) paa Flekken før man skrider til Undersøgelsen; thi det har gjentagne Gange hændt mig, at det ved kortere Extraktion ikke er lykkedes at faa nogensomhelst Reaktion, hvor en længere Behandling med Extraktionsmiddelet

strax gav det forønskede Resultat. Svag Ophedning kan gjerne anvendes, men er som Regel betragtet overflødig. Hvad den store Mangfoldighed af tidligere anvendte Op-løsningsmidler for Blodflekker angaar, har jeg ingen Erfaring om deres Brugbarhed i det specielle Tilfælde, at Flekken har været oversmurt med let forraadnende Stoffe. Jeg har som sagt stadig fundet mig vel tjent med en meget fortyndet Natronopløsning (5 Draaber 4 %'s Natronlud paa 5 Kcm. Vand\*) og har derfor holdt mig til den. Saameget tror jeg imidlertid at kunne sige, at fortyndet Ammoniak omtrent gjør samme Tjeneste, uagtet denne i et enkelt Tilfælde har slaaet Feil, hvor Natronluden gav positivt Resultat. I ethvert Fald fremgaar af, hvad jeg har sagt, at det i Regelen ikke vil være forbundet med uoverstigelige Vanskeligheder at fremstille Hæminkrystaller af forraadnet og indtørret Blod, uagtet jeg villig skal medgive, at Paavisningen her ikke lykkes saa let som ved friskt indtørret.

Spørgsmaalet bliver nu, om jeg kunde anvende de vundne Erfaringer over Hæminkrystallernes Fremstilling af forraadnede og indtørrede Blodflekker blandede med Rust til Forklaring af de Vanskeligheder, som Undersøgelsen af den omtalte Øxe frembød, og dette tror jeg temmelig direkte lader sig gjøre, naar man tager de øvrige ved Analysen optrædende Fænomener i Betragtning. Ved første Øiekast skulde det synes, som om Paavisningen af Blodlegemer ikke kunde forenes med den Antagelse, at Blodet havde raadnet før Indtørringen, idet jo disse destrueres ved Forraadnelsen; men saavidt jeg kan forstaa, lægger dog dette ingen absolute Hindringer i Veien for Forklaringen. Det karakteristiske for den begyndende Forraadnelse af Blodet er nemlig

---

\*) En nogenlunde koncentreret Natronlud har stedse givet mig upaalidelige Resultater, rimeligvis paa Grund af den af Jäderholm (Nordisk Medicinskt Archiv Bd. 6, 1874, No. 21, S. 12) fremhævede Omstændighed, at Hæmatin er uopløseligt i stærk Natron- eller Kalilud.

ikke Blodlegemernes Destruktion, men deres Affarvning; Opløsningen sker først, efter at de fleste Blodlegemer er affarvede, naar altsaa alt Farvestoffet er traadt over i Plasma og gaar da temmelig langsomt for sig, naar ikke Forholdene forresten er meget gunstige. Standses altsaa Forraadnelsen paa et Punkt, hvor endnu ikke alle Blodlegemer er helt opløste, vil man fremdeles kunne finde disse, om end naturligvis sædvanlig i temmelig ringe Mængde, og dette var netop Tilfældet her. Der fandtes meget faa uforandrede Blodlegemer, og samtlige disse var farveløse, saa der intet var i Veien for at tænke sig, at Blodet efter at være kommen paa Øxen var bleven blandet med en eller anden forraadnende Materie, men derpaa var indtørret før Forraadnelsen havde grebet saa meget om sig, at alle Blodlegemerne var destruerede. Denne Antagelse faar ogsaa en Støtte i en anden Omstændighed; man kan nemlig vanskelig forstaa den fuldstændige Uopløselighed af den her omhandlede Blodflek i Vand paa anden Maade, end at Blodfarvestoffet allerede var dekomponeret i Hæmatin og Æggehvide, da saavel Oxyhæmoglobin som Hæmoglobin og Methæmoglobin er let opløselige i Vand. En Hæmatindannelse kan imidlertid neppe have gaaet for sig uden Destruktion af Blodlegemerne, medmindre Farvestoffet allerede før var traadt ud af disse; men dette vilde jo netop have været Tilfældet under ovenstaaende Forudsætning. Jeg tror derfor med temmelig Sikkerhed at kunne slutte, *at Blodflekkerne paa Øxen skrev sig fra Blod, der først delvis var forraadnet og derpaa indtørret.*

I et Tilfælde som det foreliggende, hvor Undersøgelsen blev forlangt paa Grund af Mistanke om Drab ved Hjælp af den omhandlede Øxe, vilde det naturligvis have været af største Vigtighed med Bestemthed at kunne afgjøre, hvorvidt det fundne Blod skrev sig fra et Menneske eller et Dyr. Jeg anførte i min Erklæring, at jeg ikke turde have

nogensomhelst Formodning i saa Henseende og skal i det følgende søge at retfærdiggjøre denne Opfatning, der maa ske ved første Blik kan se lidt besynderlig ud, naar man betænker, at der blev fundet og mikroskopisk maalt adskillige Blodlegemer.

Det mangler i Literaturen paa ingen Maade Angivelser over, hvorledes man skal adskille Menneskeblod i Flekker fra andre Blodsorter; men deres Værd for den legale Analyse er endnu særdeles indskrænket, ja jeg skulde næsten være tilbøielig til at tro, at der aldrig forekommer en Blodflek, hvor dette Spørgsmaal med Bestemthed lader sig afgjøre.

Ikke længe efter Hæminkrystallernes Opdagelse af Teichmann meddelte Willbrand\*), at der mellem Hæminkrystallerne af forskjellige Blodsorter bestaar saa store Forskjelligheder, at man deraf skulde kunne slutte sig til Blodets Art. Denne Paastand er saavidt mig bekjendt aldrig ligetil gjendrevet, men heller aldrig bekræftet, og saameget er vist, at om der maaske kan findes en liden krystallografisk Forskjel mellem Hæminet af forskjellige Blodsorter, saa er dog denne idetmindste saa lidet egnet til Skjelnemærke i saa Henseende, at jeg ikke tror, nogen samvittighedsfuld Iagttager vil tillade sig at drage Slutninger deraf.

Større Opsigt vakte i sin Tid Barruel's angivelige Opdagelse, at Menneske- og de forskjellige Slags Dyrblod skulde kunne adskilles ved Hjælp af den Lugt, de udvikler ved Behandling med koncentreret Svovlsyre, uagtet den ikke besidder større Værd end den foregaaende, hvilket hovedsagelig er paavist af Chevalier\*\*) ved aldeles slaaende Forsøg.

\*) Ueber neue Merkmale zur Erkennung von Menschenblut etc. Med. Centr. Ztg. XXX, 1868, S. 79. Citeret efter Schmidts Jahrbücher der in- und ausländischen gesammten Medicin, 1862, Bd 116, S. 145.

\*\*) Annales d'hygiène publique et de médecine légale Bd. 49, 1853, S. 413.



Selv om det imidlertid var tænkeligt, at Lugten kunde øves saaledes op, at det var muligt at skjelne de forskjellige Slags Blod paa denne Maade, vilde Methodens Værd dog være meget indskrænket i Retstilfælde, hvor det sædvanligvis handler sig om en saa liden Flek, at der i Regelen ikke opstaar nogensomhelst Lugt ved Behandling med Svovlsyre. Heller ikke det af Erpenbeck \*) angivne Middel til at kjende den specifikke Blodlugt, nemlig Ophedning af Blodet i tørre Reagensglas, kan tillægges noget Værd ved forensiske Undersøgelser.

Det bedste Middel, som man overhovedet besidder til at afgjøre, hvorvidt en Blodflek skriver sig fra Menneske- eller Dyreblood er utvivlsomt den mikroskopiske Maaling af Diameteren af Blodlegemerne, naar disse lader sig isolere og ikke allerede er destruerede. Herved kan det med Sikkerhed afgjøres om Blodet hidrører fra Pattedyr eller Fugle, idet de sidstes Blodceller er elliptiske og kjerneholdige, medens de førstes er cirkulære og uden Kjerne, men et andet Spørgsmaal, som har været meget diskuteret, og hvorom Meningerne den Dag i Dag er delte, er, om den omtalte Maaling er istand til at adskille de forskjellige Pattedyrs Blod indbyrdes og da specielt Menneskeblood fra de øvrige.

Allerede Virchow \*\*) meddelte i 1857, at en koncentreret Opløsning af Kalihydrat var særdeles egnet til at udtrække de uforandrede Blodlegemer af gamle Blodflekker, og efter ham har mange andre benyttet det samme; men dog i Almindelighed kun for overhovedet at konstatere Tilstedeværelsen af Blod. Først Malinin \*\*\*) fremhævede i en Afhandling, der har gjort adskillig Opsigt, at dette Forhold kunde benyttes til at bestemme, om Blodet hidrørte fra et Menneske eller et Dyr. Til den Ende behandler Malinin

\*) Vierteljahrschr. f. ger. Medicin XXI, S. 2.

\*\*) Virchows Arch. f. pathol. Anat. etc. 1857, Bd. XII, S. 336.

\*\*\*) Virchows Arch. f. pathol. Anat. etc. Bd. 65, 1875, S. 528.

Flekken en kort Tid med en stærk Kaliopløsning (30 %) og maaler de derved erhholdte Blodlegemers Diameter mikroskopisk. Findes derved en Diameter =  $7\mu$  eller mere, skal Blodet være Menneskeblod. Senere har H. Schmidt \*) modificeret Malinins Fremgangsmaade derhen, at han lader den afskrabede Flek ligge 24 Timer i koncentreret Kalilud før Maalingen foretages. Han paastaar paa denne Maade med fuld Bestemthed endog at kunne adskille Menneske- og Hundeblood, hvor Blodlegemernes Størrelse som bekjendt staar hinanden meget nær. Da hans Anskuelse saavidt mig bekjendt har fundet ikke saa ganske liden Tilslutning, skal jeg først kortfattet nærmere belyse samme og derpaa anvende den paa det her omhandlede Tilfælde.

Efter Malinin og Schmidt beløber Størrelsen af de med Kaliopløsning udtrukne Blodlegemer sig til:

|                         |          |                      |
|-------------------------|----------|----------------------|
| Hos Mennesket . . . . . | $7.7\mu$ | (7 — $8\mu$ )        |
| « Hunden . . . . .      | $7.0\mu$ | ( $6.6$ — $7.4\mu$ ) |
| « Kaninen . . . . .     | $6.4\mu$ | (6 — $7\mu$ )        |
| « Svinet . . . . .      | $6.2\mu$ | (6 — $6.5\mu$ )      |
| « Oxen . . . . .        | $5.8\mu$ | ( $5.4$ — $6\mu$ )   |
| « Hesten . . . . .      | $5.7\mu$ | ( $5.3$ — $6\mu$ )   |
| « Faaret . . . . .      | $4.5\mu$ | (4 — $4.8\mu$ )      |

Hvis ovenstaaende Værdier \*\*) er rigtige i sin Almindelighed, og dette kan ikke betvivles, da det er bekræftet af mange, skulde deraf altsaa fremgaa, at man ved Maaling af de erhholdte Blodlegemer skulde kunne adskille de forskellige Blodsorter. Ved nærmere Eftersyn vil det dog vise sig ikke at være saa let, specielt hvad Adskillelsen af Menneske- og Hundeblood angaar, idet de laveste Værdier for Menneskeblodlegemerne fuldstændig naaes af de høieste

\*) Dissertation, Erlangen 1878. I Uddrag i Zeitschr. f. anal. Chemie, 1880, Bd. 19, S. 257.

\*\*) De er naturligvis noget mindre end de oprindelige Blodlegemer fordi disse skrumper lidt ind i Kalilud.

for Hundeblood. Jeg tror derfor, at man i sin Almindelighed ikke er berettiget til af Maalingen af de ved Kalilud udtrukne Blodlegemer i et saa vigtigt Tilfælde som en Legalundersøgelse af en Blodflek at drage nogen endelig Slutning om Blodets Oprindelse, og specielt vil neppe Malinins og Schmidts Paastand, at der findes Menneskeblood, hvor Blodlegemernes Diameter er  $7\mu$  holde Stik, da Hundebloodlegemer kan opnaa en ligesaa stor Størrelse. Spørgsmaalet, om en Blodflek hidrører fra Menneskeblood eller ikke, vil derimod være lettere at besvare benægtende, idet en meget ringe Værdi for Blodlegemediameteren med temmelig Bestemthed vil tyde paa dette. Men alt det ovenstaaende gjælder kun forsaavidt *Blodflekken er frisk indtørret*; er den derimod som i det *her beskrevne Tilfælde* først delvis *forraadnet*, reduceres den hele Methode til Intet; thi Blodlegemerne lider da ved Forraadningsprocessen Forandringer i sin Størrelse, saa Maalene ikke længere kommer til at referere sig til de uforandrede (eller lidt indskrumpede) Blodlegemer. Da det nu som Regel betragtet er umuligt paa Forhaand at vide, om Bloodet var delvis forraadnet før Indtørringen, bliver Konklusionen den, at det i sin Almindelighed paa Videnskabens nuværende Standpunkt *er umuligt med fuld Sikkerhed at afgjøre, om Bloodet i en indtørret Blodflek skriver sig fra Mennesker eller andre Pattedyr.*

---

# Norske ertsforekomster.

AF

I. H. L. VOGT.

---

## III.

### Om den Thelemark-Sætersdal'ske ertsformation.

---

#### *Literatur.*

- Th. Scheerer. Resultater af en mineralogisk rejse i Thelemarken. 1844. Nyt mag. f. naturv. No. 4.  
— Die Kupfererz-Fundstätten in Sætersdalen im südlichen Norwegen. 1845. Berg.- und Hüttenm. Zeit. Jahrg. IV.  
B. M. Keilhau. Gæa norvegica. 1850. Pag. 425—446.  
T. Dahl. Om Thelemarkens geologi. 1860. Nyt mag. f. naturv. No. 11.  
Th. Scheerer. Ueber die Kupfererz-Gangformation Tellemarkens. 1863. Berg.- und Hüttenm. Zeit. Jahrg. XXII.  
P. Herter. Erzführung der Thelemarkischen Schiefer. Zeits. d. Deuts. geol. Gesells. 1871.  
Dr. Th. Kjerulf. Udsigt over det sydlige Norges geologi. 1879.
- 

De vigtigste af de i Thelemarken og Sætersdalen optrædende bergarter er følgende: granit med gneisgranit — gneis med typisk hornblende- og glimmerskifer — kvartsit, kvartsskifer, kvarts-konglomerat og sandsten, forskellige slags fyllitskifere, lerskifer, kalk- eller dolomitlag, m. m. Desuden

optræder lejlighedsvis gabbro (saavidt mig bekjendt kun i grundfjeldspartiet i Nissedal, hvor den ledsages af de vanlige ertsforekomster), grønstengange samt porfyr (kvartsporfyrr) <sup>1)</sup> m. m.

Den første, som foretog en almindelig geologisk undersøgelse af Thelemarken, var *B. M. Keilhau*, se *Gæa norvegica*. Han fattede de to førstnævnte bergartgrupper (med typer granit og gneis) sammen under et, men udsondrede den sidstnævnte skiferformation under navnet »Gousta-territorium«, som han holdt for yngre end det egentlige grundfjeld. Senere har *T. Dahll* udskildt graniten med gneisgraniten for sig til et meget stort felt, som indtager hele den centrale del af Kristianssands stift; derimod slog han (se karterne) det egentlige grundfjeld sammen med *Keilhaus* Gousta-territorium.

En kommende detail-undersøgelse vil rimeligvis indskrænke det store granit- eller gneisgranit-felts omraade paa forskjellige punkter, et thema, som dog ikke hører ind under den her tilsigtede fremstilling. Vi skal her kun ganske kortelig omtale de dele af granitfeltet, som støder op til vore ertsdistrikter.

Allerede *Th. Scheerer* gjør opmærksom paa (se *Berg- und Hüttenm. Zeit.* 1845), at graniten i Strømshejen (partiet mellem Moland i Thelemarken og Valle i Sætersdalen) paa en meget typisk maade viser sig at være yngre end grundfjeldet; han fremholder endog, at forholdet mellem den yngre eruptiv og de ældre skifere meget bedre kan studeres i det nævnte felt end i det allerede fra *Leopold v. Buch's* rejse saa bekjendte Kristiania-territorium. — Ogsaa *T. Dahll* frem-

---

<sup>1)</sup> Paa de af den geologiske undersøgelse udgivne karter staar angivet et større porfyrfelt i Morgedal og Dalane (Hvideseid); 'jeg har gjentagne gange gjennekrydset dette felt uden at finde porfyren, hvoraf sluttes, at feltet har mindre udstrækning end paa karterne angivet.

stiller overalt graniten som den yngre dannelse, en opfatning, som ogsaa deles af prof. *Th. Kjerulf* (se Uds. o. d. sydl. Norges geologi).

Som de geologiske karter viser (se ogsaa kart, fig. 20), optræder der lidt S. for Bandakslid (Skafse) et isoleret lidet granitfelt; bergarten (titanit- og zirkonførende granitit) har i regelen en typisk, massiv struktur; kun paa et par steder er den folieret (ved parallelt anordnede glimmerblade). Rundt omkring feltet sværmer en vrimmel af granitgange, som jævnlig sees at overskjære gneisens skikter. — Ogsaa paa andre steder i umiddelbar nærhed af den af *T. Dahll* optrukne granitgrænse, f. ex. ved Aamdals kobberværk, se kart over Næsmark grube, fig. 21, og ved Haukum grube, Hvide-seid, se kart, fig. 23, gennemkrydses skiferfeltet af en hel del granitgange. Naar man derimod kommer længere bort fra granitgrænsen, svinder gangene lidt efter lidt; i det store felt mellem Bandaksvand og Morgedal (Hvideseid, se kart, fig. 20) — hvor jeg har opholdt mig ca. 1½ maaned — iagttoges saaledes kun 2 granitgange, begge i omegnen af Brunkebergs kirke. Naar man sammenholder disse forholde med de observationer, som af de forskjellige forskere er blevne udførte angaaende Thelemarks-graniten, maa det være berettiget at slutte, at granitgangene paa de omtalte steder direkte skyldes selve granitens udbrud.

De samme slags granitgange, som optræder inde i de tilstødende skifere i nærheden af grænsen, viser sig ogsaa midt inde i granitfelterne (cfr. *T. Dahlls* fremstilling). Som det senere skal omtales, er disse gange undertiden ertsførende (se under beskrivelsen af Klovereidnutens kobberkisforekomst).

Inde i graniten S. for Bandakslid ligger der ofte, navnlig i nærheden af grænsen, en mængde uregelmæssigt begrændsede brudstykker af grundfjeldsbergarter, et forhold,

som navnlig meget godt kan studeres i de nye sprængninger ved vejen fra Aamdals værk til landevejen Bandakslid-Fyrrisdal.

Ved Bø grube, Valle i Sætersdalen (se kart, fig. 26) sees graniten under en vinkel paa ca.  $35^\circ$  at gjenneuskjære gneissens skikter, og langs grænsen ligger de ordinære brudstykker inde i graniten; tilmed sees inde i grundfjeldet flere granitgange med nøjagtig samme petrografiske karakter som selve hovedgraniten. — Paa enkelte steder, f. ex. ved landevejen Aamlid—Nissedal, sees graniten afsondret i meget typiske bænke.

Efter alle disse forholde er der fuld grund til i genetisk henseende at parallellisere meget store dele af det Thelemark-Sætersdal'ske granitfelt, navnlig, hvad der interesserer os, de partier, som begrænser de her omhandlede ertsdistrikter, med flere af vore bekendte, østlandske graniter.

---

Den Thelemark-Sætersdal'ske ertsformation, der, som vi skal se, danner en i geologisk henseende ganske vel begrænset gruppe, har en meget stor udstrækning, nemlig mellem Hitterdal i O. og Kobbernuten (paa grænsen mellem Bykle og Suldal) i V.; afstanden mellem de to yderpunkter er ca. 120 kilom.

Saavidt det for øjeblikket vides, gaar ertsstrøget inden Thelemarken omtrent uden afbrydelse, i en bredde af i middel ca. 20 kilom., paa nordsiden af den af *T. Dahll* optrukne granitgrænse (gennem sognene Hovind, Hitterdal, Gransherred, Sauland, Hjertdal, Flatdal, Silgjord, Brunkeberg, øvre del af Hvideseid og Vraadal, Laurdal, Højdalsmo, Næsland, en del af Rauland, Vinje og Mo, videre gennem Eidsborg,

Skafse samt størstedelen af Veum og Moland — et distrikt af samlet fladerum ca. 2000 kvadratkilom.). — Grænsen paa sydsiden er temmelig skarp; eksempelvis kan saaledes anføres, at i Hvideseid-distriktet kjender man S. for granitgrænsen, altsaa inde i selve granit- eller gneisgranit-feltet (S. for Hvideseid- og Vraavandene samt i Nissedal) neppe en eneste forekomst, som bliver at stille ind i den her omhandlede ertsformation, men strax man fra graniten kommer over i skiferen, er man inde i det paa gange rigeste felt (se kart, fig. 20). — Ertsfeltets begrænsning paa nordsiden maa optrækkes efter et løst skjøn; man har kun at støtte sig til, at der i de opregnede distrikter findes en vrimmel af ertsgange, men at man i de nordenfor liggende, saavidt vides, trods ivrig søgning ikke har fundet hidhørende gange, i alle fald ikke i betydeligt antal.

Mellem Thelemarken og Sætersdalen fortsætter ertsformationen antagelig uden afbrydelse, idet gangene i Skafse og Moland (de vestligste distrikter i Thelemarken) støder op til Strømshejens ertsfelt (i den nordøstlige del af Sætersdalen). I den nordligste del af Sætersdalen findes en mængde forekomster, hvoraf jeg har besøgt en del (Bø grube, de forskellige gange i og ved Kobbernuten); efter det nuværende kjendskab kan det dog ikke afgjøres, om ertsbeltet her paa enkelte steder er afbrudt ved ertstomme partier eller ej.

For at man kan faa en idé om det store antal ertsgange, som er tilstede i det her omhandlede felt, henvises til gangkartet (se fig. 20) over Hvideseid med tilstødende bygder, det parti, hvor jeg er bedst kjendt. Jeg har her havt anledning til personlig at besøge ca. 120 forskellige anvisninger, og endvidere kjendes en hel del andre. Af det samlede antal gange, som her i virkeligheden optræder, er det selvfølgelig kun en liden brøkdæl, man hidtil har stødt paa. Dette indsees bedst deraf, at de allerfleste hidtil fundne fore-



komster ligger i umiddelbar nærhed af almen befærdede steder (gaarde, sætere, veje m. m.) og kun meget faa i de lidet undersøgte ødemarker. Nye anvisninger opdages ogsaa meget jævnlig.

Den allerældste grubedrift i Norge fandt sted paa de Thelemark'ske gange, idet man allerede i begyndelsen af det 16de aarh. drev kobbererts-gruber i Moland og Skafse samt ved Guldnaes i Silgjord; *Brünnich*<sup>1)</sup> oplyser bl. a. om, at paa sidstnævnte sted var i aaret 1540 ikke mindre end 19 gruber i drift. De norsk-danske konger interesserede sig meget for den Thelemark'ske grubedrift og indkaldte jævnlig tyske bergmænd. Efter at de første fund var gjorte, har der næsten uden afbrydelse været drift paa enkelte gange, navnlig i Skafse; her drives for øjeblikket Hoffnung grube (Aamdals værk), som beskjæftiger ca. 200 mand, og som giver et godt udbytte. Af ældre gruber, som har været gjenstand for nogenlunde betydeligt arbejde, kan mærkes: Næsmark, Moberg, Mosberg, Grussen og Sligstul i Skafse, Guldnaes i Silgjord, Byglands- og Aamlid-gruberne i Morgedal (Hvideseid), Riehammer ved Tokedalen (Mo), Myklejordet i Eidsborg, Goli i Hjertdal, Holden grube i Kjøringen (Hitterdal), flere gruber hørende til det gamle kobberværk i Hovindsbygden (Tin), videre følgende gruber i Sætersdalen: Bø i Valle, Amalie- og Gamle-gruben m. m. paa Strømshejen, hvilke gruber leverede malm til Sætersdalens kobberværk (drevet fra ca. 1840—1860).

Desuden er der til forskjellige tider bleven arbejdet i en utallighed af smaa skjærp; som vi senere skal se, forekommer nemlig ertsen jævnlig rigt samlet i mindre myrer, og

---

<sup>1)</sup> *Brünnich*. Historiske efterretninger om Norges bergværk, ældre end Kongsberg sølvværk.

disse har man udvundet, men naar de har været til ende, er arbejdet bleven nedlagt.

Efter mit kjendskab til den her omhandlede ertsformation skulde det ansees for ikke usandsynligt, at der her i tidernes løb kan blive en ganske frodig bergværksdrift; de allerfleste forekomster er vistnok aldeles værdiløse, men til en begyndelse har man dog i alle fald en grube (Hoffnung i Skafse), som, trods de uheldige kommunikations-forholde, drives i temmelig betydelig maalestok, med godt udbytte og med voxende ertsrigdom, jo dybere man kommer ned, og desuden foretages for øjeblikket paa flere steder temmelig omfattende forsøgsarbejder, hvis resultat vi vistnok her ikke kan foregribe.

De i den Thelemark-Sætersdal'ske ertsformation optrædende ertser er følgende: kobberglans, brogetkobber, kobberkis med rødkobbererts, kiselmalachit, kobberlazar og malachit<sup>1)</sup>, blyglans, selenbly<sup>2)</sup>, zinkblende, arsenikkis, sølvglans<sup>3)</sup>, molybdænglans med molybdænokker, tellurvismuth, vismuthglans samt et endnu ikke nøjere undersøgt mineral (blybismuthit?), uranniobit med uranbegerts og uranokker<sup>4)</sup>, jernglans, magnetit, titanjern, rutil, svovlkis og magnetkis, desuden som sjeldenheder gediegent guld, sølv, kobber og vismuth, samt svovl; det sidstnævnte, muligens paa enkelte

<sup>1)</sup> De sidstnævnte som forvittrings-produkter.

<sup>2)</sup> Nøjere lokalitet ukjendt; ifølge en af *Hj. Roscher* foretagen analyse temmelig sølvrig.

<sup>3)</sup> *Brünnich* angiver endvidere »graa sølvmalme« med Ag, Cu, S, ofte desuden Fe og Sb, holdende indtil en tredjedel sølv; hermed menes muligens sølv-kobberglans. Den opgives at være fundet paa forskellige steder i Hitterdal (og Numedal), undertiden belagt med klart sølv.

<sup>4)</sup> Paa Strømshejen, se *Th. Scherer*, *Nyt mag. f. naturv.* B. 4.

steder ogsaa det gediegne kobber, som dekompositionsprodukt. *Th. Scheerer* angiver<sup>1)</sup> desuden braunit med rødmanganerts fra Botnedal, og *B. M. Keilhau* angiver<sup>2)</sup> kromokker fra Raundalen i Tudal, men om disse ertser forekommer i de til den her omhandlede gruppe hørende gange, er mig ubekjendt. — Endvidere findes apatit i Strømshejens gange, mellem ganggraniten og sidestenen, fastvoxet paa den sidste (ifølge *Th. Scheerer*<sup>1)</sup>).

Da brogetkobber og muligens ogsaa kobberglans fra de forskjellige lokaliteter har vevlende sammensætning og egen-skaber, gjengives her de mig bekjendte analyser fra Thelemark'ske og Sætersdal'ske findesteder; til sammenligning anføres ogsaa analyser af brogetkobber fra andre norske forekomster.

|                                           | Cu     | Fe    | S     |                                                                                |
|-------------------------------------------|--------|-------|-------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Kobberglans, fra Strømshejen . . . . .    | 79.12  | 0.28  | 20.36 | } Ifølge <i>Th. Scheerer</i> , <i>Nyt mag.</i> , B. 5.                         |
| — Bygland, Højdalsmo                      | 77.76  | 0.91  | 20.43 |                                                                                |
| Brogetkobber, Flekstveit, Hvideseid . . . | 57.55  | 16.21 | 26.07 | } Priv. meddelelse.<br>} Ifølge <i>Cleve</i> ,<br>} <i>Geol. før. førh.</i> 1. |
| — Nøsterud, Hvideseid                     | ca. 58 |       |       |                                                                                |
| — Numedal . . . . .                       | 62.76  | 11.64 | 25.39 |                                                                                |
| — Aardal, Sogn . .                        | 68,75  | 8.49  | 24.25 |                                                                                |

*Th. Scheerer* anfører, at kobberglansen fra Bygland (Højdalsmo) har god kløvning i en retning, specifik vægt 5.521, medens den fra Strømshejen har sp. v. 5.795; han antager, at ertsen optræder i to dimorfe varieteter. — Analyserne af brogetkobber fra de to Thelemark'ske forekomster svarer til

<sup>1)</sup> *Nyt mag. f. naturv.* B. 4.

<sup>2)</sup> *Gæa norvegica.* pag. 445.

formel  $(\text{Cu}_2\text{S})_3\text{Fe}_2\text{S}_3$ , analyserne fra de to sidstnævnte steder derimod til resp.  $(\text{Cu}_2\text{S})_5\text{Fe}_2\text{S}_3$  og  $(\text{Cu}_2\text{S})_7\text{Fe}_2\text{S}_3$  (ifølge *Cleve*).

De her omhandlede mineraler indeholder desuden altid lidt sølv, antagelig ogsaa altid lidt guld, det sidste dog kun i meget smaa kvantiteter. — Gediegent sølv er paa flere steder (f. ex. i Haukum eller Eiang skjærp (øvre) og Donstad skjærp, begge i Hvideseid, i Hoffnung grube, Skafse, i en ny forekomst i Højdalsmo) fundet i form af traade eller blik inde i brogetkobber (eller kobberglans), og jeg skulde være tilbøjelig til at tro, at de to mineralers sølvgehalt for en væsentlig del altid skriver sig fra mekanisk indblandet sølv, som i tilfælde maa være tilstede i meget fint fordelte partier. Paa denne maade kan man faa en naturlig forklaring paa det faktum, at sølvgehalten i brogetkobber fra forskellige nærliggende steder inden samme lokalitet kan variere temmelig betydelig (se analyse-rækken). Rimeligvis forholder det sig med guldet paa samme maade som med sølvet; ogsaa guld er flere steder fundet i traade eller blade, siddende inde i brogetkobber (f. ex. ved Haukum skjærp, Hvideseid og ved Moberg grube, Skafse).

## Sølvgehalt i

|                                        |             |                    |
|----------------------------------------|-------------|--------------------|
| Kobberglans fra Aabø, Morgedal . . . . | 0,03 %      | } Egne analyser.   |
| — » Ormtveit, Vraadal . . .            | 0,165       |                    |
| — » Næsmark, Skafse . . .              | 0,3 - 0,5   | } Ældre opgaver.   |
| — » Mosnap, — . . .                    | 0,5         |                    |
| Brogetkobber fra Haukum, Hvideseid .   | 0,23        | } Egne analyser.   |
| — » Nøsterud, — . .                    | 0,08        |                    |
| — » Kroksmyr, — }                      | 0,25        |                    |
| — » Størslaad, — }                     | 0,22        |                    |
| — » Størslaad, — }                     | 0,44        |                    |
| — » Guldnæs, Silgjord . .              | 0,16        |                    |
| — » Guldnæs, Silgjord . .              | 0,6         | Ældre opgave.      |
| Kobberkis fra Hoffnung, Skafse . . . . | 0,017-0,025 | Privat meddelelse. |

Sølv, som blev udvundet af brogetkobber fra Størslaat og Kroksmyr, Hvideseid, holdt 0,125 % guld (egen analyse).

Rødkobbererts, kiselmalachit, kobberlazar og malachit optræder paa forskjellige steder som forvitnings-produkter; kiselmalachiten fra Strømshejen har ifølge *Th. Scheerer* en sammensætning af 35,53 %  $\text{SiO}_2$ , 43,54 %  $\text{CuO}$ , 20,59 %  $\text{H}_2\text{O}$  (o:  $\text{Cu Si O}_3 + 2\text{H}_2\text{O}$ ).

Blyglansen er ogsaa overalt sølvholdig; forekomster, som ligger nær ved hinanden, kan vise højst forskjellige ge-halter.

## Sølvgehalt i

|                                   |               |                                                |
|-----------------------------------|---------------|------------------------------------------------|
| Blyglans fra N. Bygstøl . . . . . | 0,03 - 0,04 % | } Samtlige fra<br>Hvideseid.<br>Egne analyser. |
| — » Sølvberglid . . . . .         | 0,10          |                                                |
| — » Uderdalen . . . . .           | 0,12          |                                                |
| — » Storskov . . . . .            | 0,08          |                                                |
| — » Hægestøl . . . . .            | 0,32          |                                                |

Zinkblende findes i enkelte af blyglans-forekomsterne, men ellers, saavidt jeg har kunnet se, aldrig. Arsenikkis har jeg kun fundet paa et sted, nemlig i en blyglans-anvisning i Hvideseid. Molybdænglans optræder meget jævnlig, undertiden i temmelig gode krystaller; paa et sted, nemlig ved Langvatn-skjærp pr. Kobbernuten, Bykle, viser den sig, ledsaget af kobberkis, magnetkis og svovlkis, i saadan mængde, at man temmelig let kan udvinde flere ton nogenlunde ren erts. Antagelig er denne molybdænglans-forekomst den største i Skandinavien.

Tellurvismuth (selenholdig) er tidligere fundet i Mosnap, muligens ogsaa i Moberg grube, Skafse; uranbegerts (i okta-edere) med uranniobit og uranokker i Strømshejens gruber.

Forskjellige slags vismuthminerale er koncentrerede i et lidet felt ved Bandakslid—Klovereid (syd for Bandaksvand, se kart, fig. 20). Paa østsiden af landevejen, ikke langt fra

Bandak, findes en kvartsgang med vismuthglans og molybdænglans (i gang inde i skiferen), paa toppen af Klovereid-nuten findes et graat, hidtil kun kvalitativt undersøgt mineral (bestaaende af meget Pb, lidt Cu og Ag, meget Bi og meget S, muligens cosalit (blybismutit) af sammensætning  $2\text{PbS} + \text{Bi}_2\text{S}_3$  eller et lignende sulfosalt), og lidt N. for toppen er der (ifølge *P. Herter*) et lidet skjærp, som fører vismuthglans og gediegent vismuth (de sidstnævnte forekomster i gange i granit).

Gediegent guld er fundet i Eiang grube (Hvideseid) og Moberg grube (Skafse), gediegent sølv paa førstnævnte sted og i Donstad-skov skjærp pr. Bandak (ifølge *T. Dahll*) samt i Hoffnung grube (Skafse), overalt sammen med brogetkobber. I sidstnævnte grube førte gangen oppe i dagen kun kobberkis; et sted paa dybet indfandt lidt sølvholdig brogetkobber, sølvglans (som belæg paa sprækker i kvarts) samt gediegent sølv sig omtrent samtidig som ledsagere af kobberkisen; der blev fundet sølvtraade af vægt indtil 0.5 kgr.

Gediegent kobber har jeg et sted, nemlig i nærheden af Dalsgruben (Hvideseid), fundet i traadform (sammen med lidt kobberglans), optrædende paa en saadan maade, at det maatte holdes for en primær dannelse; ved Fles skjærp (Mo) sidder gediegent kobber paa fine sprækker i og ved kobberglans og er her antagelig et dekompositions-produkt<sup>1)</sup>.

I en svovlkis- og molybdænglans-førende gang ved Vraa (Vraadal) findes lidt svovl som sekundær dannelse.

Jernglans eller jernglimmer optræder temmelig hyppig, i regelen sammen med kobberglans eller brogetkobber; magnetit derimod har jeg kun seet paa et sted, nemlig i en

<sup>1)</sup> Det erindres, at ged. kobber (som sekundær dannelse) undertiden sidder paa fine spalter i svovlkis fra de Trondhjem'ske forekomster eller i nikkelholdig magnetkis fra de til gabbro knyttede forekomster (seet et saadant stykke fra Erteliens gruber, Ringenrike).

liden gang ved Størslaat (pr. Flekstveit, Hvideseid), hvor den ledsager brogetkobber. Titanjern og rutil har jeg fundet i et par gange lidt S. for Børtevand (Mo). Svovlkis og magnetkis, de ellers saa vanlige ertser, er i den Thelemark—Sætersdal'ske ertsformation yderst sjeldne; magnetkis har jeg saaledes kun truffet paa et sted, nemlig i den allerede tidligere nævnte molybdænglans-forekomst ved Langvatn (pr. Kobbernuten, Bykle), og svovlkis findes næsten aldrig undtagen i de enkelte dele af Thelemarken optrædende blyglans-forekomster.

---

I geologisk henseende optræder ertserne paa flere, højst forskellige maader, nemlig i almindelige gange, som skjærer gjennem de forskellige slags sedimentære bergarter, i granitgange, i granit og endelig i tilsyneladende lejeformige falbaand; i det følgende skal vi se, at der mellem alle disse veksende forekomst-maader existerer en meget nøje genetisk forbindelse.

At give en detailleret beskrivelse af alle de mange forekomster (i antal ca. 150), som jeg har havt anledning til at undersøge, kan ikke have mere end rent lokal interesse; vi skal derfor indskrænke os til kun at omtale de enkelte grupper.

I de egentlige gange, som snart viser sig inde i grundfjeldet, snart inde i de forskellige slags lerskifere, fylliter, kvartsiter, konglomerater m. m., er kvarts det almindeligste gangmineral; desuden optræder kalkspath<sup>1)</sup>, som i enkelte gange er tilstede i større mængde end kvarts, dolomit (ifølge *P. Herter*), flusspath (neppe noget sted i rigelig mængde),

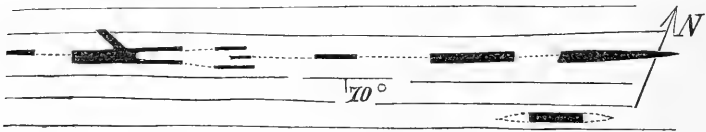
---

<sup>1)</sup> Kalkspathen fra Bygland (i Højdalsmo) bestaar, ifølge *Th. Scheerer*, se *Nyt mag. f. naturv.*, no. 5, af 98.77 %  $\text{Ca CO}_3$  og 1.23 %  $\text{Mg CO}_3$ .

clorit, hornblende, epidot (som paa enkelte steder, f. ex. i Langvatn skjærp pr. Kobbernuten, optræder i smukke krystaller) m. m. Det synes at fremgaa af *B. M. Keilhaus* beskrivelse (se *Gæa norvegica*, pag. 446), at den bekendte mineralcombination thulit, cyprin og granat (ved Kleppan i Souland) findes i og ved en brogetkobber-førende kvartsgang; cyprinen fra Strømshejen skal ogsaa skrive sig fra en hidhørende ertsgang.

Forholdet mellem vore gange og de omgivende skifere er højst variabelt, idet gangene paa enkelte steder i det hele og store optræder omtrent lejeformig, medens de paa andre steder under vilkaarlige vinkler overskjærer skikterne; i sidste fald følger gangene i regelen efter visse fremtrædende spaltssystemer i bergarten (som tilfældet er f. ex. ved Nøste-

Fig. 17.



Kart over Dalsgruben (øvre), Hvideseid.

Feltets længde = 155 m.

Sort betyder gangen paa de steder, hvor den er blottet.

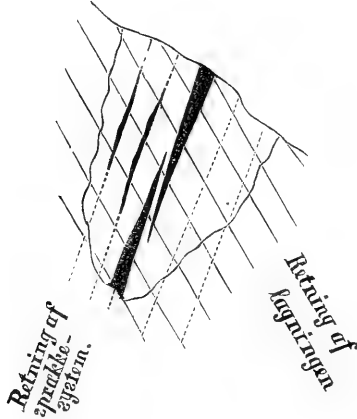
rud, Størslaat, Bjørgustøl m. m. i Hvideseid). De nogenlunde lejeformige gange plejer ikke med slavisk nøjagtighed i hele deres løb at holde sig mellem netop de samme lag, idet de gjerne hist og her springer over fra et skikt til et andet, eller de forgrener sig og viser andre uregelmæssigheder. — Fig. 17 gjengiver kartsnit over en af de regelmæssigste af de tilsyneladende lejeformige gange (Dalsgruben i Hvideseid); ogsaa her sees dog, at gangen et sted deler sig i to omtrent parallelle grene, og at den et andet sted udsender en aare, som krydser skikkerne. Oppe i dagen kan gangen, som udelukkende bestaar af kvarts og kobberkis, og



som har en bredde mellem 0.1 og 0.5 m., følges i en længde af ca. 155 m. Mellem gangen og den omgivende skifer (fyllitskifer) er der overalt en meget skarp grænse (slet).

Fig. 18, profil fra Bjørgustøl kobberkis-skjærp (Hvide-

Fig. 18.

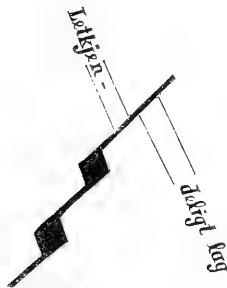


Profil fra Bjørgustøl grube, Hvideseid.

Profilets højde = 3 m.

Sort betyder gang.

Fig. 19.



Profil fra Byglund, Højdalsmo, visende forkastning efter gangfladen.

Profilets længde = ca. 1 m.

seid), kan tjene som eksempel paa de gange, der overskjærer skikterne; ertsen, nemlig kobberkis, sammen med lidt kvarts sidder i flere smaa-gange efter bergartens bedste spalteret

ning, omtrent lodret paa lagningen. — At gangene er virkelige spalter, fremkomne ved forskyvning mellem de to gangvægge, kan bl. a. meget godt sees af fig. 19, detailtegning fra Bygland skjærp (Højdalsmo); selve gangen er i foreliggende tilfælde fyldt med kobberglans og jernglans, kalkspath og lidt kvarts.

Kobberglansen og navnlig brogetkobberen plejer i de Thelemark'ske kvartsgange at være koncentreret i højst uregelmæssige nyrer; for at illustrere dette vil vi nøjere omtale et specielt tilfælde: en kvartsgang ved Mostøl (øverst i Morgedal, Hvideseid) kan oppe i dagen følges i længde ca. 40 m. (hvorpaa kommer tildækket terrain, saa gangens videre løb ikke kan studeres) og har oftest en bredde af ca. 0.1 m.; i regelen indeholder gangen kun spor af erts (brogetkobber med lidt jernglans). Paa et sted svulmer selve gangen (i 3—4 m.s længde) op til ca. 0.8 m.s mægtighed og er (eller var) her fyldt med næsten aldeles ren erts; allerede i et par favnes dyb kilte ertsklumpen sig ud, hvorefter sluttet, at uregelmæssigheden er lige stor i vertikal som i horizontal retning. — Som ventelig kan være, har saadanne paa enkelte punkter overmaade rige forekomster ofte givet anledning til forsøgsdrift, men man har altid strax sluttet arbejdet, naar det rige parti har været afbygget. Noget større, systematisk undersøgelsesarbejde er aldrig bleven udført, og derfor har man ikke nogen erfaring om de rige nyrers optræden. De fleste af de hidhørende gange synes at have et temmelig lidet felt.

De kobberkis-førende gange er i regelen meget mere regelmæssige end de brogetkobber-førende; dette viser sig bl. a. derved, at næsten samtlige større gruber i Thelemarken har været anlagte paa kobberkis-gange (Hoffnung i Skafse, Aamlid og Bygland i Hvideseid, Guldnæs i Silgjord m. m.). — Ogsaa de blyglans-førende gange synes at være temmelig regelmæssige. Paa enkelte steder, f. ex. ved Storskov paa

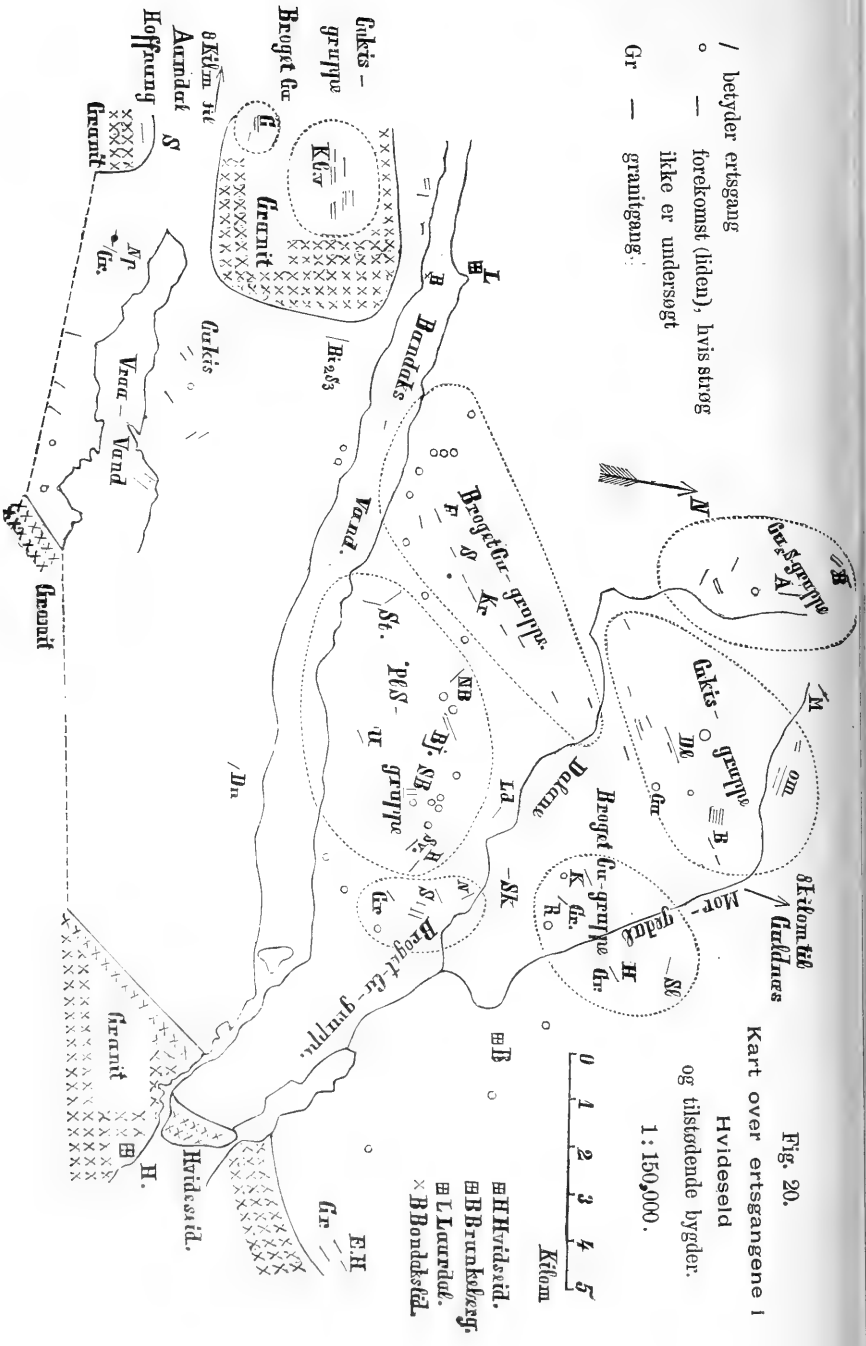
N.-siden af Bandaksvand, sidder blyglans i meget store og næsten aldeles rene klumper, undertiden vejende endog flere ctn.

I de forskellige gange optræder ertserne altid i visse bestemte kombinationer. Kobberglans er saaledes altid ledsaget af en del jernglans, undertiden desuden af lidt brogetkobber, men aldrig af kobberkis eller svovlkis; brogetkobber er ledsaget dels af jernglans og kobberglans, dels af kobberkis, men heller ikke af svovlkis. I de egentlige kobberkis-gange optræder kobberkisen næsten altid aldeles ren, uden iblanding af fremmede ertser; kun yderst sjelden indgaar lidt jernglans eller brogetkobber, sølvglans m. m.; derimod aldrig svovlkis; det sidstnævnte mineral skal saaledes aldrig være bleven fundet i Hoffnung kobberkis-grube, som er gjenstand for temmelig udstrakt drift, eller i de mindre kobberkis-gange (ved f. ex. Dalsgruben og Bjørgustøl). — I de Thelemark'ske kobbererts-gange synes der i kvantitativ henseende at herske et omtrent konstant forhold mellem de to elementer kobber og jern, idet der er omtrent lige meget af begge to tilstede (altsaa forhold ca. 1 : 1); i kobberkis-gangene er ertsen næsten aldeles ren, i brogetkobber-gangene indgaar kun lidt jernglans (et sted ogsaa magnetit), i kobberglans-gangene derimod oftest temmelig meget jernglans<sup>1)</sup>. Det synes heraf at maatte fremgaa, at mineralkombinationen er bleven bestemt af den ved ertsernes dannelse forhaandenværende relative svovlmængde og derimod ikke af kobbermængden. Svovl har som bekjendt større affinitet til kobber end til jern, og derfor har det, hvor det var tilstede i ringe mængde, gaet i forbindelse med kobberet, medens jernet holdt sig sammen med surstoffet; først hvor der var mere svovl tilstede, kunde

---

<sup>1)</sup> I de tidligere beskrivelser omtales ikke jernglansen, antagelig fordi den ikke har nogen økonomisk betydning, saa man ikke har fæstet sig ved den.

- / betyder ertsgang
- o forekomst (tiden), hvis strøg ikke er undersøgt
- Gr — granitgang



H Hvideseid.  
 B Brunnskeberg.  
 L Laurdal.  
 x Bondskstål.

0 1 2 3 4 5  
 Kilom

# Kart over ertsgangene i Hvideseid og tilstødende bygder.

Maalestok 1 : 150,000.

Granitgrænsen er afsat efter T. Dahlls kart. De enkelte ertsgrupper er:

|                                                                     |   |                                                                                                                    |                                                   |
|---------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| <i>Kobberglans-gruppe</i><br>(Cu <sub>2</sub> S-gruppe).            | } | B. Bygland, flere gange.                                                                                           |                                                   |
|                                                                     |   | A. Aabø, flere gange. Desuden nogle gange ved Aakre m. m.                                                          |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gang.</i>                                           |   | M. Mostøl.                                                                                                         |                                                   |
|                                                                     | } | Om. Omlid, en større grube, som tidligere har været gjenstand for lidt større drift, og flere mindre gange.        |                                                   |
| <i>Kobberkis-gruppe</i><br>(Cukis-gruppe).                          |   | B. Bygland, en hel del gange, hvoraf flere blev drevne i forrige aarh.                                             |                                                   |
|                                                                     |   | Di. Dalsgruben, øvre (se fig. 17), desuden en del dermed parallelle gange.                                         |                                                   |
|                                                                     |   | Cu. Fund af gediegent kobber.                                                                                      |                                                   |
|                                                                     |   | Flere parallelle gange ved Dalane og Vesterdal, kun førende brogetkobber.                                          |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gruppe</i><br>(Broget Cu-gruppe).                   | } | Kr. Kroksmyr                                                                                                       | } kun brogetkobber.                               |
|                                                                     |   | S. Størslaat                                                                                                       |                                                   |
|                                                                     |   | F. Flekstveit, brogetkobber og kobberkis.                                                                          |                                                   |
|                                                                     |   | Sl. Solid.                                                                                                         |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gruppe</i><br>(Broget Cu-gruppe).                   | } | H. Hemstvedt, ved granitgang (Gr.).                                                                                |                                                   |
|                                                                     |   | K. Kal.                                                                                                            |                                                   |
|                                                                     |   | Gr. Granitgang med brogetkobber (ved R. 3: Romunddalen).                                                           |                                                   |
|                                                                     | } | H. Hægestøl.                                                                                                       | } Samtlige disse og endnu flere førende blyglans. |
|                                                                     |   | Sv. Sølvberglid.                                                                                                   |                                                   |
| <i>Blyglans-gruppe</i><br>(PbS-gruppe).                             |   | SB. Søndre Bygstøl.                                                                                                |                                                   |
|                                                                     |   | NB. Nordre Bygstøl.                                                                                                |                                                   |
|                                                                     |   | U. Uderdalen.                                                                                                      |                                                   |
|                                                                     |   | St. Storskov.                                                                                                      |                                                   |
|                                                                     |   | Bj. Bjørgustøl, kobberkis-gang.                                                                                    |                                                   |
|                                                                     | } | Ld. Lundevaldsdalen                                                                                                | } førende blyglans og kobberkis.                  |
|                                                                     |   | Sk. Skolteberg                                                                                                     |                                                   |
| <i>Mellemlæddene</i><br>mellem den sidstnævnte gruppe og de øvrige. |   | Dn. Donstad, førende blyglans, kobberkis, brogetkobber m. m.                                                       |                                                   |
|                                                                     |   | Desuden gange af blyglans, molybdænglans og kobberertser mellem NB. og Kr.                                         |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gruppe</i><br>(Broget Cu-gruppe).                   | } | N. Nøsterud.                                                                                                       |                                                   |
|                                                                     |   | S. Slovaa-fjeld.                                                                                                   |                                                   |
|                                                                     |   | Gr. Grave.                                                                                                         |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gange.</i>                                          |   | E. H. Eiang eller Haukum, i granitgange.                                                                           |                                                   |
| <i>Kobberkis-gruppe</i><br>(Cukis-gruppe).                          | } | Kl.v. Et fuldstændigt system af i graniten optrædende gange ved Klovereid.                                         |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gruppe</i><br>(Broget Cu).                          |   | G. Flere gange, lignende de nys nævnte, ved Gaaskjærn.                                                             |                                                   |
| <i>Vismuth-forekomster.</i>                                         | } | Bi <sub>2</sub> S <sub>3</sub> . Vismuthglans-gang. Gange med forskellige vismuth-mineraler ved Kl.v. (Klovereid). |                                                   |
| <i>Brogetkobber-gang.</i>                                           |   | Np. Gr., i og ved granitgang ved Naper.                                                                            |                                                   |
| —                                                                   |   | med flere ertser, ved S., Skred vand, i granit.                                                                    |                                                   |

ogsaa jernet blive forbundet med samme, hvorved der efter svovlmængden dannedes enten brogetkobber eller kobberkis<sup>1)</sup>).

I blygans-gangene er blyglans den dominerende erts; desuden optræder undertiden lidt zinkblende samt kobberkis med enten svovlkis eller brogetkobber.

Som kart (fig. 20) over Hvideseid med tilstødende bygder viser, er gangene samlede til lokalt begrænsede grupper (formationsled), som udmærker sig ved, at inden hver enkelt gruppe finder altid den samme ertskombination sted. Begynder vi ved den NV.-stre del af kartet, saa møder vi først (ved Aakre, Aabø og øvre Bygland) en hel del gange — hvoraf jeg har besøgt 9 —; der udelukkende fører kobberglans med lidt jernglans og undertiden lidt brogetkobber. Lige op til denne gruppe støder (som mellemed med næste gruppe?) den tidligere omtalte brogetkobber-gang ved Mostøl. Længere mod V. og SV. kommer en større gruppe, hvoraf hidtil kjendes mindst 20 gange, der udelukkende fører kobberkis (nemlig ved Aamlid og nedre Bygland i Morgedal og rundt omkring Dalsgruben). De forskellige Byglands- og Dalsgange har omtrent alle retning ONO — VSV. og fald 70° mod SSO.; som kartet viser, er der antagelig en meget nøje forhindelse mellem flere af disse gange, idet den ene gaar i fortsættelsen af den anden. — S. og SV. for den store kobberkis-gruppe har vi (ved Dalane, Vesterdal. Kroksmyr, Størslaot og Flekstveit) en mængde gange, tilsammen ca. 20, hvor brogetkobber er dominerende, og O. for samme

<sup>1)</sup> Vi vil her minde om, at i de til den yngre granit og syenit bundne forekomster (se første afsnit) optræder svovlkis eller magnetkis altid i magnetit- eller jernglans-gruberne, derimod, saavidt vides, ikke i de vistnok faa forekomster, hvor ertsen bestaar af kobberglans eller brogetkobber.

gruppe har vi ogsaa (ved Solid, Hemstvedt, Romunddalen) en hel del brogetkobber-gange.

Partiet mellem Tveit og Flekstveit (lidt N. for den østre del af Bandaksvand) karakteriseret derved, at gangene her fornemmelig fører blyglans (ved Hægestøl, Sølvberglid, flere steder ved Johnslid og Transtøl, søndre og nordre Bygstøl, Uderdalen, Storskov m. m.); desuden optræder gjerne lidt zinkblende, svovlkis, kobberkis, molybdænglans, et sted ogsaa lidt arsenikkis, medens ingen af disse ertser, naar undtages kobberkisen, er fundet i de tidligere nævnte ganggrupper. Inden blyglans-distriktet findes som undtagelse en gang (ved Bjørgustøl), der kun fører kobberkis, og desuden et par ganske smaa falbaand af brogetkobber. — Paa grænsen mellem blyglans-gruppen og de omgivende kobbererts-grupper findes paa flere steder (som mellemed?) gange, der fører blyglans og kobberkis i omtrent samme mængde (forekomsterne ved Skolteberg, Lundevalsdalen, Donstad-skov m. m.).

O. for blyglans-gruppen har vi en hel del gange (ved Grave, Tveit og Svolaafjeld), der fører brogetkobber med jernglans eller kobberglans.

I feltet Bandakslid-Klovereid findes, som tidligere berørt, en liden vismuth-gruppe, idet der her paa forskellige steder (i kvartsgange saavel i gneis som i granit og i pegmatit-gange inde i granit) optræder ikke mindre end 3 forskellige slags vismuth-mineraler (gediegent vismuth, vismuthglans og blybismuthit?) — Det her omhandlede element kjendes ellers ikke i Thelemarkeh, naar undtages, at der tidligere i Mosnap (og Moberg?) gruber (Skafse) er fundet lidt tellurvismuth.

En lignende inddeling i gang-grupper kan ogsaa gjen-nemføres paa flere andre steder i Thelemarken og Sætersdalen; eksempelvis kan anføres, at de forskellige slags gange og impregnationer i Klovereidnuten (Skafse) udelukkende fører kobberkis (med spor af vismuth-ertser), medens de tilsvarende forekomster længere mod SV. ved Gaaskjærn for-

nemmelig fører brogetkobber. Paa Strømshejen holder gangene udelukkende kobberglans og brogetkobber, ved Kobbernuten derimod brogetkobber og kobberkis. I Grubeaasen ved Aamdals værk er der flere gange (Hoffnung, Magdalena m. m.), der næsten udelukkende holder kobberkis. Lidt S. for Børtevand (Mo) findes en højst ejendommelig ganggruppe, væsentlig førende titanjern og rutil.

---

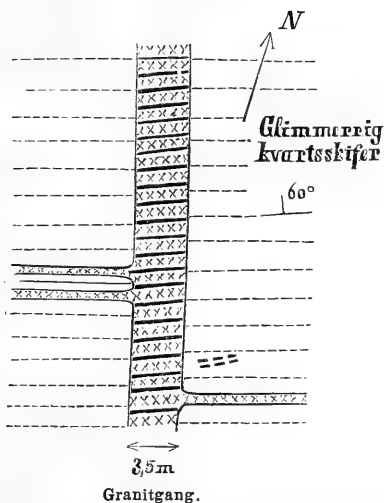
Som allerede *Th. Scheerer* i 1845 gjorde opmærksom paa, afgiver de i Thelemarken og Sætersdalen optrædende ertsførende granitgange i ren geologisk henseende en ikke uvæsentlig interesse. Den mest bekendte af de hidhørende forekomster findes ved Næsmark grube (beliggende ca. 1 kilom. fra Hoffnung grube, Skafse), tidligere beskrevet og aftegnet af *T. Dahll*, *Th. Scheerer* og *P. Herter* (c. l.) samt medtaget i den af *v. Groddeck* leverede generelle oversigt over ertsforekomster (Ueber die Lehre der Erzlagerstätten). — Granitgangen, som er temmelig grovkrystallinsk, dog ikke pegmatitisk, og som bestaar af lyserød orthoklas (mikroklin?), lys muscovit og hvid kvarts, skjærer i en længde af ca. 400 m. omtrent lodret gennem en glimmerholdig kvartsskifer; paa flere steder udsendes smale (kun ca. 0.2 m. mægtige), men lange apofyser, som med matematisk nøjagtighed er indkilede mellem de tilstødende lag. Selve hovedgangens mægtighed er i middel ca. 3 m.

Paa de fleste steder er granitgangen (se kart, fig. 21) gjennemsat af et system af omtrent vertikalt gaaende ertsgange, som under en vinkel af ca.  $75^\circ$  skjærer hovedgangens længderetning, og som følger i temmelig regelmæssig afstand (0.3—0.4 m.) efter hinanden. Ertsgangene bestaar af kvarts og lys glimmer, hvilken sidste fornemmelig sidder anvoxet paa gangvæggene (som ved Klovereid, se herom



senere), og fører desuden en del kobberglans (sølvholdig), der dels er jævnt fordelt i gangen, dels ansamlet ved væggene. I de smaa ganges midte er der undertiden smaa druserum, beklædte med kvarts- og glimmer-krystaller. Gangenes mægtighed varierer mellem 0.02 og 0.10 m.; ertsmæng-

Fig. 21.



Kart over Næsmark grube, Skafse.

De sorte linjer betyder ertsgange.

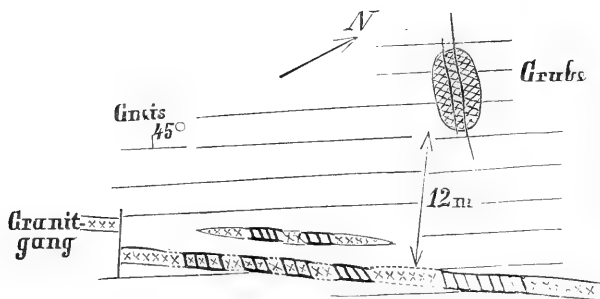
den gaar fra en tredjedel af hele gangen til næsten intet<sup>1)</sup>. Grænsen mellem de smaa, krydsende ertsgange og den

<sup>1)</sup> Efter opgave i *P. Herters* beskrivelse (c. l., se pag. 373), leveredes ved det gamle, forældede opberedningsværk pr. kubikfavn (à ca. 8m<sup>3</sup>) udskudt berg gennemsnitlig 1<sup>1</sup>/<sub>4</sub> ctn. slig (à ca. 50 kgr.) med 70% kobber; det udbragte kobber holdt ca. 0.5% sølv. Man udvandt altsaa ca. 0.25% kobber og 0.000125% sølv af det udskudte berg; ved moderne anlæg vil man antage kunne faa ca. det dobbelte. — Det kan bemærkes, at selve granitgangen har stor udstrækning, og at den i regelen er ertsførende, hvoraf sluttes, at det forhaandenværende ertskvantum er temmelig betydelig. Da ertsen, som i og for sig er meget rig, næsten udelukkende holder sig i de smaa tvergange, vil skeidningen falde meget let. — I tidligere dage var forekomsten gjenstand for en temmelig betydelig drift.

omgivende granitgang er overalt meget skarp; der kan ikke være tale om nogen gradvis overgang mellem ertsrige kvartssudsondringer« og den ordinære, feldspathrige granitgang. At tvergangen udfyldningsmaterial er en yngre dannelse kan bl. a. slutes deraf, at gangene paa flere steder har udseende som fig. 18  $\sigma$ : langs gangspalterne foregik der nogle smaa forkastninger, forinden udfyldningen fandt sted. — Allerede paa dette stadium vil vi gjøre opmærksom paa, at spalterne rimeligvis er at opfatte som granitgangens afsondringsflader.

Paa et par steder sees de smaa tvergange at fortsætte en kort strækning (kun 0.2—0.5 m.) ind i kvartsskiferen, overalt indkilet mellem dennes lag. Et sted er skiferen des-

Fig. 22.



Kart over Naper skjærp, Skafse.

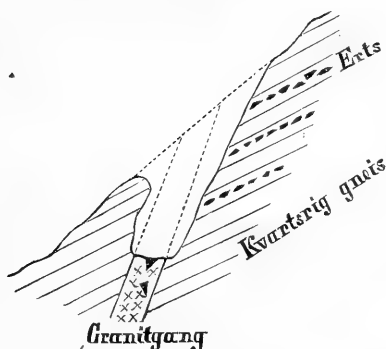
uden i et par m.s længde paa falbaands vis impregneret med lidt erts, der ledsages af kvarts og glimmer.

Selve granitgangen indeholder endvidere, uafhængig af de ertsførende tvergange, hist og her inde mellem de ordinære bestanddele lidt kobberglans, som optræder paa en saadan maade, at den ikke kan holdes for at være »indblæst« fra de yngre gange, men den maa allerede have været tilstede, da udkrystallisationen af granitens bestanddele fandt

sted. I genetisk henseende er disse ertspunkter af ganske betydelig interesse.

En i geologisk henseende aldeles analog granitgang med ertsførende tvergange findes ved Naper skjærp (se kart, fig. 22), lidt S. for Vraalidosen (Vraadal). Denne forekomst er desuden interessant derved, at den viser os forbindelsen mellem de vanlige ertsgange (kvartsgangene) og de ertsførende granitgange. Man har nemlig den samme slags erts (brogetkobber med lidt kobberglans) inde i kvarts-kalkspath-

Fig. 23.



Profil over øvre Haukum grube, Hvideseid.

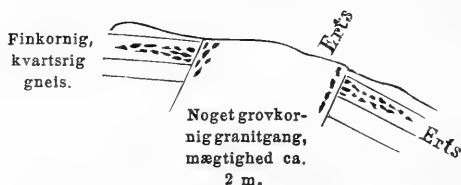
gange, der overskjærer gneisens skikter og gaar omtrent normalt paa granitgangen, og inde i de smaa gange, der i regelmæssig anordning gennemkrydser granitgangen.

Ved nedre Eiang eller Haukum grube (Hvideseid, se kart, fig. 20) har vi igjen en lignende forekomst, idet ertsen (brogetkobber) sidder i tynde kvartsgange, der krydser en granitgang; ved den øvre grube viser ertsen (fremdeles brogetkobber) sig dels klumpformig indsprængt i en smal granitgang (ca. 0.2 m. mægtig) og dels i smaa aarer, ledsaget af kvarts og zeolither (desmin og stilbit), der udspringer fra granitgangen og gaar ind i den tilstødende kvartsrige gneis, idet de temmelig nøjagtig følger skiktningen (se profil, fig. 23). —

I nærheden træffer vi en granitgang (af mægtighed ca. 2 m.), som hist og her langs med grænsen er impregneret med lidt erts (brogetkobber), der sidder inde mellem de ordinære bestanddele; paa begge sider optræder desuden den samme slags erts i smaa falbaand, der begynder ved granitgangen og lidt efter lidt taber sig inde i skikterne (se profil, fig. 24).

Efter *Th. Scheerers* og *T. Dahlls* beskrivelser optræder ertsen paa forskellige steder i Strømshejen og i den vestre del af Moland og Skafse næsten udelukkende i granitgange, dels paa den maade, at ertsen sidder indsprængt inde i selve granitgangen langs dennes grænser (efter den ved fig. 24 gjengivne typus) og dels saaledes, at ertsen hol-

Fig. 24.



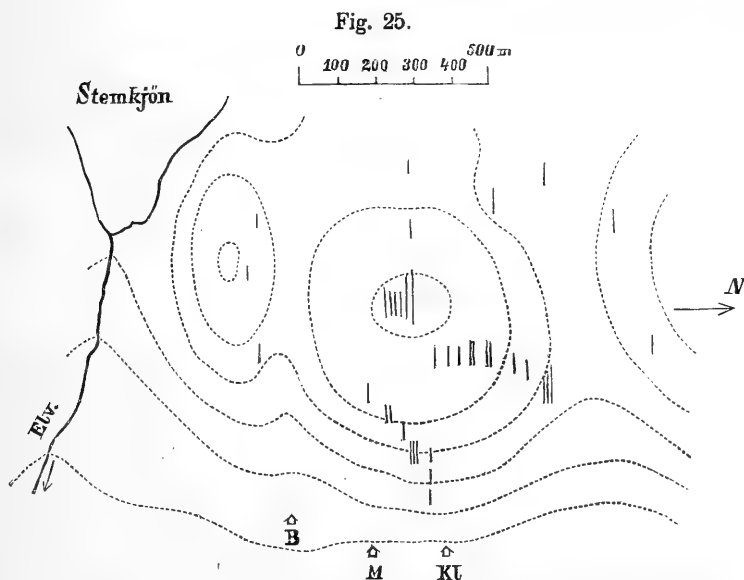
Profil fra øvre Haukum, Hvideseld.

der sig i kvartsgange, der gaar mellem granitgangen paa den ene side og de tilstødende skifere paa den anden (som f. ex. ved fig. 11 og 16).

Alle de hidtil omhandlede, ertsførende granitgange har optraadt i nærheden af granitgrænsen; naar man kommer ind i selve skiferfeltet, altsaa i større afstand fra grænsen, blir, som tidligere omtalt, granitgangenes antal mindre og mindre, men fremdeles fører de (hist og her) erts; de to eneste granitgange langt (8—10 kilom.) fra grænsen, som det lykkedes mig at finde, begge i omegnen af Brunkeberg kirke (i nær-

heden af Romuddalen), førte erts (brogetkobber) inde mellem de ordinære bestanddele, om end vistnok kun i meget ringe mængde.

Inde i selve graniten findes et sted, nemlig ved Klovereid (Skafse) en højst ejendommelig forekomst; ertsen er kobberkis, der kun rent undtagelsesvis er blandet med lidt svovlkis eller med spor af forskellige vismuth-mineraler (se herom tidligere, pag. 35). Paa de forskellige punkter inden feltet viser ertsen sig paa meget vekslende maade, nemlig dels i kvartsgange, dels langs disse indsprængt i selve graniten og dels i ordinære pegmatitgange.



Kartskitse over kobberkis-gangene i Klovereid-nuten  
(optrædende i granit).

- B. Blikum.  
M. Midtgaarden.  
Kl. Klovereid.

Hver højdekurve repræsenterer ca. 50 m.s vertikal different.

Som det fremgaar af kartskitsen (fig. 25), er graniten i henimod 1 kilom.s udstrækning gjennemsat af et system af parallelle (O-V.-gaaende og steiltstaaende) kvartsgange, der er samlede til en hel del grupper. Inden hver enkelt af disse er der en svite af fra hinanden isolerede gange, der gaar i en indbyrdes afstand af ca. 0.1—1 m. Mægtigheden af hver enkelt gang varierer mellem ca. 0.05 og 0.5—1 m. — De ertsførende kvartsgange er udviklede efter samme typus som de smaa gange, der overskjærer Næsmark grubes granitgang (se pag. 37). Langs gangsvæggene sidder paavoxet en mængde smaa krystaller af lys glimmer (muscovit), medens midten af gangen indtages af kvarts og kobberkis, sjældnere desuden glimmer og som en undtagelse flusspath. Kobberkisen er jævnlig samlet i temmelig store, rene klumper. — Langs gangene er bergarten altid indsprængt med lidt kobberkis, gjerne i zone af bredde ca. 0.3—0.5 m. Saalangt impregnationen varer, har bergarten i petrografisk henseende undergaaet en omvandling, i principet svarende til den, som har fundet sted langs de i gabbro optrædende apatitgange — Den ordinære granit i Klovereidnuten bestaar af kvarts (rigelig), mikroklin (rigelig), orthoklas og oligoklas, biotit (ikke meget), videre titanit og zirkon (begge i gode krystaller, titaniten jævnlig i meget store individer), apatit og magnetit. Den omvandlede granit er sammensat af kvarts (rigelig), mikroklin (temmelig rigelig, paa flere steder skriftgranit-mæssig sammenvoxet med kvarts), lidt oligioklas og rimeligvis lidt orthoklas samt temmelig meget muscovit, men derimod ikke spor af biotit; desuden findes lidt zirkon (i smaa krystaller, bl. a. liggende inde i muscovit-bladene) og kobberkis, der ikke optræder i aarer gennem præparaterne, men i smaa partier mellem de øvrige bestanddele. — Den i den omvandlede granit optrædende lyse glimmer synes at være aldeles identisk med den, som viser sig i de ertsførende gange; da endvidere granitens glimmer-gehalt plejer gradvis

at vøxe, jo nærmere man kommer gangvæggene, maa det være berettiget at slutte, at der hersker en genetisk forbindelse mellem den i den omvandlede granit og den i ertsgangene optrædende glimmer; en nøjere udredning af disse forhold ved en senere anledning. — Vi vil allerede her gjøre opmærksom paa den i geologisk henseende store lighed, som hersker mellem Klovereidnutens forekomst og flere af de til granit knyttede tinsten-forekomster, navnlig den bekjendte forekomst ved Geyer i Erzgebirge (se f. ex. *A. Stelzner: Ueber die Granite bei Geyer, Greifenstein und Ehrenfriedersdorf, m. m.*). Saavel ved Geyer som ved Klovereidnuten er graniten gjennemsat af et system af parallelle gange, der er samlede til forskjellige grupper; begge steder er graniten langs gangene omvandlet paa omtrent samme maade. Ved Geyer har indvirkningen af ertsen, som kun er temmelig sparsomt tilstede, i regelen ikke været saa stærk, at graniten fuldstændig er gaaet over til den ved de øvrige tinsten-forekomster saa ordinære »greisen« (kvarts og lys glimmer), men man har faaet en mellem-bergart omtrent som ved Klovereid.

Paa sidstnævnte sted viser ertsen sig tilslut hist og her inde i temmelig grovkornige pegmatitgang, hvor den sidder inde mellem gangens ordinære bestanddele; man maa antage, at ertsen her er bleven dannet efter samme hovedprincip som de øvrige mineraler.

En lignende forekomst findes ved Gaaskjærn (Skafse), lidt S. for Klovereid; den geologiske forskjel mellem de to lokaliteter bestaar kun deri, at det nys behandlede felt er meget større, og at ertsen ved Gaaskjærn er brogetkobber med lidt kobberkis, paa det andet sted derimod kun kobberkis. Begge steder har gangene den samme retning.

Et sted lige ved Skredvand (Skafse) træffer vi ogsaa en kobbererts-forekomst inde i granit; ertsen, nemlig kobberkis (der nær dagen delvis er dekomponeret til malachit og rød-

kobbererts) og svovlkis, optræder her sammen med kalkspath, kvarts og blaaviolet flusspath i en meget druset gang af ca. 2 m.s bredde.

Vi skal nu gaa over til at behandle en forekomst, som paa en maade danner det geologiske mellemlid mellem de nys beskrevne og de følgende. — Graniten ved Bø grube<sup>1)</sup> (se kart, fig. 26) i Valle, Sætersdalen, skjærer under en vinkel af ca. 35° gennem grundfjeldets skikter; langs grænsen ligger der en hel del gneis-brudstykker, oftest smaa og uregelmæssige, inde i graniten, og denne sender saavel smaa som store apofyser ind i grundfjeldet. Der er overalt skarp grænse mellem graniten og de tilstødende skifere (gneis med glimmerskifer og hornblendeskifer). — Naar vi sammenligner disse forhold med de i indledningen omhandlede, maa der være fuld grund til at slutte, at graniten her er en yngre, senere frembrudt masse. Lige ind til selve kontakten med gneisen beholder graniten sin vanlige, meget grovkrystallinske struktur, hvilket skulde tale for, at den er af azoisk oprindelse.

Som kartet viser, følger ertsen, som bestaar af kobberkis med lidt brogetkobber, i det hele og store efter gneisens strøg, om der end muligens hist og her kan være nogle mindre afvigelser; i profil sees, at afbygningen ogsaa paa dybet retter sig efter skiktstillingen (fald ca. 45° mod NNO.)<sup>2)</sup>. I felt er lejestedet ved to anbrud fulgt i ca. 90 m.s længde; hovedgrubens dyb er antagelig ca. 20—25 m.; det ertsimpreg-

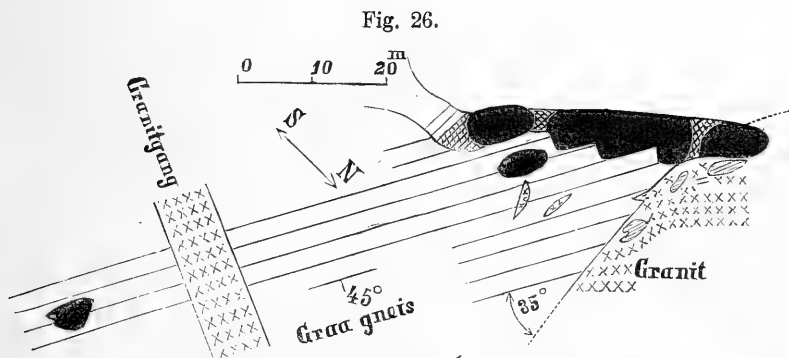
<sup>1)</sup> Drevet i aarene 1840—60, hovedgrube for det tidligere Sætersdalens kobberværk.

<sup>2)</sup> I den SO'-stre del af gruben skjærer en hjælpedrift (dagbrud) over lagene; man maa heraf ikke ledes til den opfatning, at afbygningen i det store har krydset skikterne.



nerede skifer-niveau har en samlet mægtighed af 1—2 m., paa enkelte steder dog en del mere. Ertsen sidder dels mellem gneisens lag, dannende tilsyneladende falbaand, og dels i netværk af uregelmæssige aarer, der skjærer skikkerne. Det sidste moment taler for, at ertsen er senere indtrængt, noget, som ogsaa analogi med de øvrige forekomster i Thelemarken og Sætersdalen antyder, se herom senere.

Selve grubeafbygningen fortsætter et par m. ind i graniten, og efter opgivende skal man ogsaa her have fundet en del erts; hvorvidt denne har optraadt inde i graniten, indstrøet mellem dennes ordinære bestanddele, eller i løsevne gneis-brudstykker, kan vi desværre ikke faa oplysning om.



Kart over Bø grube, Valle i Sætersdalen.

I geologisk henseende svarer denne forekomst, saavel hvad angaar beliggenheden ved granitgrænsen som ertsens fordeling i skiferen, meget nøje til flere af de tidligere beskrevne jernerts-forekomster ved grænsen af den yngre granit (f. ex. til Narverud grube, se profil, fig. 3).

Af øvrige, falbaand-lignende forekomster vil vi specielt omtale følgende: Ved Lundevalsdalen skjærp i Hvideseid (se kart, fig. 20) sidder blyglans og kobberkis i intim blanding fint indsprængt i et gneislag af et par m.s mægtighed;

som ved en tidligere anledning omtalt, ligger denne forekomst netop paa grænsen mellem den store blyglans-gruppe i partiet Tveit—Flekstveit (N. for Bandak) og de nordenfor optrædende kobbererts-grupper, og der er derfor grund til at formode, at ertsen i Lundevalsdalen skjærp staar i en eller anden genetisk forbindelse med ertsen i gangene (efr. pag. 35). — Paa flere steder i nærheden af Vraavand finder vi falbaand, som kan følges i 50—100 m.s længde (langs lagfladerne), medens mægtigheden kun er ganske liden ( $\frac{1}{2}$ —1 m.); ertsen er brogetkobber eller kobberglans, altsaa den samme som i de nærliggende gange. — I Hvideseid har jeg, naar undtages den nys nævnte forekomst, kun truffet et par falbaand, dels blyglans- og dels kobbererts-førende, i partiet Tveit—Flekstveit. Det kan bemærkes, at i kvantitativ henseende er der i de af mig undersøgte distrikter neppe tiendeparten saa mange falbaand som gange; desuden er falbaandene overalt meget fattige, saa de i og for sig ikke tiltrækker sig nogen større opmærksomhed.

De her omhandlede forekomster er ikke bundne til noget bestemt niveau i skiferrækken eller til nogen bestemt bergart; vi har saavel gneis og glimmerskifer som kvartsskifer og fyllitskifer impregneret med erts. Selv i lokalt begrænsede felt (som f. ex. ved Vraavand) har vi ganske forskellige bergarter ved de nær hinanden liggende falbaand.

Paa flere steder kan det iagttages, at det skiferlag, som er impregneret med erts, viser sig ikklædt en mere krystallinsk dragt end de tilstødende, ertstomme lag (aldeles som ved de to første ertsgrupper). Af de nye mineraler, som skyldes den ved ertsens dannelse foraarsagede metamorfose, er granat, hornblende og epidot de vigtigste<sup>1)</sup>.

Ved gennemgaaelsen af de til granitgange bundne fore-

---

<sup>1)</sup> Muligens hører ved Kleppan (Souland) grossular, thulit og vesuvian-varieteteten cyprin ogsaa med til denne mineralgruppe.

komster har vi tidligere berørt et par punkter, hvor erts viser sig i tilsyneladende lejer inde i skiferen; saavel ved Næsmark grube (se kart, fig. 21) som ved øvre Eiang eller Haukum skjærp (se profil, fig. 24) sees erts (resp. kobberglans og brogetkobber) i smaa falbaand, der udspringer fra granitgangene og lidt efter lidt taber sig i skiferen; det for os vigtige moment er, at ogsaa den sidste indeholder netop den samme erts som granitgangene. — Paa aldeles lignende maade sees hist og her erts i smaa falbaand at gaa ud ogsaa fra de ertsførende kvarts-kalkspath-gange.

Ved Johnslid skjærp (pr. Tveit, Hvideseid), hvor den forhaandenværende ertsmasse vistnok kun er ganske ubetydelig, møder man et i geologisk henseende højst interessant forhold. — Ved første øjekast tror man ogsaa her at have for sig en af de ordinære, lejeformigt optrædende forekomster, men ved nøjere undersøgelse viser det sig, at ertsen ikke følger skikterne, men derimod den fra lagfladerne forskellige skifrihed; den paa stedet herskende bergart er en fyllitskifer.

---

I den vestligste del af den Thelemark—Sætersdal'ske ertsformation finder vi et lidet ertsfelt i omegnen af Kobbernuten (øverst i Bykle, Sætersdalen, nær grænsen mod Suldal, Stavanger amt). — Ertserne her bestaar paa de forskellige steder af brogetkobber, kobberkis, molybdænglans, lidt blyglans, magnetkis etc.

I selve Kobbernuten, et lidet fjeld, som ligger midt inde i vort felt, og som fornemmelig bestaar af fyllitskifer, er ertsen (kun brogetkobber og kobberkis) paa en meget typisk maade knyttet til et par gange af temmelig finkornig

kvartsdiorit<sup>1)</sup>. Skiferen staar omtrent vertikalt, gangene, som kan følges i ca. 750 m.s længde, ligger derimod omtrent horizontalt. — Paa en hel del punkter finder vi her smaa ertsbrud netop paa grænsen mellem gangene, som er et par m. mægtige, og de tilstødende bergarter; ertsen sidder dels i smaa kvartsaarer, der nøjagtig følger grænsen (aldeles som ved f. ex. Nedre Grorud grube, Stølsvig m. m. m.), og dels i isolerede, ofte meget uregelmæssige, nyrer inde i skiferen, overalt lige ved gangene. Paa enkelte steder bestaar nyrene af næsten aldeles ren erts; efter den erfaring, man ved et lidet forsøgsarbejde har erhvervet, kiler de sig snart ud efter strøg og fald, aldeles som de tidligere omtalte brogetkobbernyrer i de Thelemark'ske kvartsgange. — Selve de eruptive gange indeholder endvidere hist og her lidt erts, som sidder inde mellem de ordinære bestanddele, og som saaledes maa være en primær dannelse; den i gangene optrædende erts er altid af samme mineralogisk karakter som den ved grænsen.

I omegnen af Købbernuten findes flere ertsførende kvartsgange, der i enhver henseende stemmer overens med de

---

1) Bergartens væsentligste bestanddel er *hornblende*, lysegrøn, stærkt pleochroitisk, undertiden i store krystaller, som i snit  $\perp$  c-axen viser sig begrænsede af  $\infty P$  og  $\infty P \bar{\infty}$ ; ofte flere individer samlede i negformige grupper; desuden findes en del *biotit*, i smaa, graabrune, stærkt pleochroitiske, ofte krystallografisk begrænsede blade. — Disse to mineraler ligger i en meget finkornig grundmasse, som dannes af en mængde smaa, farveløse individer; man kan her adskille *plagioklas* (med tvillingstribning) og *kvarts* (et lyst, klart mineral, uden spaltbarhed, kvartsens interferensfarver og udseende; ved koncentrisk-polariseret lys paavist at være optisk enaxig); videre er der antagelig lidt *orthoklas* tilstede. *Apatit*, i temmelig store krystaller, *magnetit* og *tilanjern* (?).

Efter den mineralogiske sammensætning staar bergarten, hvis bestemmelsen af orthoklas er rigtig, paa grænsen mellem hornblendegranit og kvartsdiorit; da strukturen ikke er krystallinsk kornig (som granitens), men derimod svarer til den, som karakteriserer flere af f. ex. de svenske kvartsdioriter, maa vi stille vor bergart i klasse med disse.

Det kan meget godt tænkes, om end ikke bevises, at disse gange, som, efter de optrædende mineraler at dømme, maa være meget  $\text{SiO}_2$ -rige, er apofyser fra det nærliggende granitfelt.

Thelemark'ske; vi vil kun nævne forekomsten ved Langvatn skjærp, som udmærker sig ved at føre temmelig meget molybdænglans, der optræder i store og rene klumper; i samme gang findes lidt molybdænokker (sekundær paa sulfidet), kobberkis, magnetkis, svovlkis m. m. samt epidot.

---

Man maa med temmelig stor sikkerhed kunne gaa ud fra, at alle de her beskrevne Thelemark'ske og Sætersdal'ske ertsforekomster, muligens dog med undtagelse af Kobbernutens ertsfelt, hører ind under en og samme hovedgruppe. Dette er noget, som allerede fremgaar af forekomsternes mineralogi, idet det vanskelig kan tænkes, at saa sjeldne ertser som f. ex. brogetkobber og kobberglans paa forskellige nærliggende punkter skulde kunne skyldes geologiske processer, som ikke stod i nogetsomhelst forhold til hinanden. Ogsaa af den lovbundethed, hvormed gangene er samlede til visse grupper, (se f. ex. gangkartet over Hvideseid, fig. no. 20), maa det være berettiget at slutte, at den ene forekomst ikke optræder aldeles uafhængig af den anden. — Man vil muligens indvende, at ertsen ofte viser sig paa saa højst forskellige maader (i kvartsgange, granitgange, granit og falbaand), men vi har dog allerede tidligere gjort opmærksom paa, at der mellem de forskellige slags afdelinger findes en hel del bindeled, et forhold, som vi i det følgende skal forsøge nøjere at udvikle og begrunde.

Allerede den første forsker, som lidt nøjere beskæftigede sig med studiet af den her omhandlede ertsformation, nemlig *Th. Scheerer*, blev opmærksom paa det nøje forhold, som i Thelemarken og Sætersdalen eksisterer mellem ertsforekomsterne og den eruptive granit; der ytres herom i *Berg—und Hüttenm. Zeit.* 1845: »Das Vorkommen der Kupfererze scheint

mit dem Auftreten dieses eruptiven Granits in nahem genetischen Zusammenhange zu stehen«.

Senere har *T. Dahll* ogsaa gjort sig til toltk for den samme anskuelse, idet han fremholder, at ertserne ikke forekommer i nogen bestemt slags skifer, men i granitgange og »nyrer eller lejeformige gange af ren kvarts« i forskellige skifere. Granitgangene sammenlignes med dem, som hører hjemme inde i selve gneisgraniten. Han kommer herved til den konklusion, at »kobberertserne blev bragt til overfladen ved gneisgraniten«. — Endvidere anmærkes, at de fleste og vigtigste af vore forekomster skal optræde i nærheden af grænsen, og at man paa en mængde steder ser spor af erts lige ved grænselinjerne, i hvilken anledning der gjøres opmærksom paa, »at søgning efter metaller kan være at anbefale langs grænserne«. — Med den sidst refererede fremstilling er jeg ikke ganske enig, idet karterne viser, at der optræder ligesaa mange anvisninger i flere kilom.s afstand fra grænsen som lige ved samme; den eneste større forekomst, som for øjeblikket er i drift, nemlig Hoffnung grube, ligger vistnok lige ved grænsen, men da vi ogsaa har ganske udstrakte ertsfelt langt fra samme (f. ex. Guld næs i Silgjord, Aamlid og Bygland i Morgedal), tør vi ikke opstille som nogen generel regel, at forekomsterne nær graniten i det hele og store skal være de rigeste.

*P. Herter* fæster fornemmelig opmærksomheden derpaa, at ertsen paa forskellige steder optræder tilsyneladende lejeformig, hvoraf han slutter, at den dannedes samtidig med skiferen. For at forklare de egentlige gangforekomster antager han, at metalforbindelser paa en eller anden maade er bleven udludet af de allerede eksisterende lag og senere afsat i tilfældigt forhaandenværende sprækker. — Der er dog, hvad han selv paapeger, flere omstændigheder, som ikke kan forklares ved denne hypothese, saaledes navnlig

ikke ertsens højst ejendommelige optræden saavel i granit som i granitgange.

I Udsigt over d. sydl. Norges geologi slutter *Th. Kjerulf* sig til *T. Dahlls* fremstilling og opfatning.

Da der nu til vor disposition staar et meget udførligere material end det, som de tidligere forskere havde at raade over, skal vi i det følgende forsøge nogenlunde indgaaende at redegjøre for vore forekomsters genesis.

Allerede de rent topografiske forhold giver en svag antydning til, at ertsen afhænger af graniten; idet nemlig ertsdistriktet i det hele og store strækker sig i bælte paa nord-siden af grænsen mellem granit og skifer (efter *T. Dahlls* kart); af denne omstændighed kan vi dog ikke her uddrage nogen sikker slutning, idet bæltet er meget bredt (ca. 20 kilom. eller derover), og idet dets begrænsning synes at være meget svævende. Vi kan altsaa i den her refererede henseende ikke direkte sammenligne den Thelemark—Sætersdal'ske ertsformation med forekomsterne ved den yngre granit (se det første afsnit). Det argument, som i genetisk henseende ved denne ertsgruppe var det afgjørende, falder i Thelemarken omtrent bort.

For ganske schematisk at illustrere forbindelsen mellem ertsen og eruptiven vil vi opregne de hidtil kjendte punkter, hvor erts optræder i granit eller granitgange.

I *granit*: Det store felt ved Klovereidnuten, hvor ertsen sidder saavel i kvartsgange og langs samme indsprængt i graniten som i granitgange; det tilsvarende felt ved Gaaskjærn; skjærp ved Skredvand, Bø grube(?).

I *granitgange*<sup>1)</sup>: Næsmark, Mosnap, Moberg, Naper,

<sup>1)</sup> Det maa bemærkes, at mine undersøgelser fornemmelig har gaaet for sig i Hvideseid, temmelig langt fra granitgrænsen og i strøg uden mange granitgange; det er navnlig i Moland, Skafse og Strømshejen, hvor jeg kun er lidet lokaliseret, at de fleste af de ertsførende granitgange findes.

Donstad pr. Bandak(?), flere gange ved Eiang eller Haukum skjærp, ved Romuddalen, flere, mindst 7 (ifølge *Scheerer*) paa Strømshejen.

Paa flere af disse steder (f. ex. ved de to gange ved Eiang, ved Romuddalen, for en del ogsaa ved Klovereid (i granitgangene) og Næsmark etc.) sidder ertsen paa en saadan maade inde mellem granitens øvrige bestanddele, at man maa kunne slutte, at den allerede var tilstede, forinden graniten endelig gik over i fast form — hvilket er et slaaende bevis for, at ertsen her staar i direkte genetisk afhængighedsforhold til graniten.

Ved f. ex. Næsmark grube (kart, fig. no. 21) har vi den samme slags erts saavel primær inde i graniten som paa tværgange, der overskjærer hovedgangen; ved Klovereid (kart, fig. no. 25) har vi paa lignende vis den samme slags erts i granitgange og i yngre optrædende kvartsgange. Vi maa af disse omstændigheder kunne slutte, at ertsen overalt, hvor den viser sig i granit, resp. granitgange, direkte stammer fra eruptiven.

Forbindelsen mellem de ertsførende granitgange og de ertsførende kvartsgange kan neppe noget sted studeres bedre end ved Naper skjærp (kart, fig. no. 22), hvor vi igjen har den samme slags erts ved de to forekomst-maader. — Allerede tidligere har vi nøjere omtalt tilsvarende forbindelser mellem erts i granit- eller kvartsgange og erts, impregneret i skifer (se f. ex. fig. 21, 23 og 24), og ved Bø grube (fig. 26) finder vi en forekomst, hvor ertsen direkte udspringer fra granitgrænsen.

Selv om man ikke paa noget sted havde fundet erts, primær inde i graniten, maatte man alligevel kunne slutte, at ertsen maatte staa i et eller andet afhængighedsforhold til den nævnte bergart. — Hverken ved at forudsætte en sekretions-theori (som *P. Herter* gjør) eller en erts-emanation, som i kronologisk henseende var aldeles uafhængig af gra-



nitens dannelse, kan man nemlig forklare den omstændighed, at ertsen ofte topografisk er bundet til granit, resp. granitgange — et forhold, som gjentager sig paa saa mange steder, og som i regelen viser sig paa en saa typisk maade, at vi ubetinget maa slutte, at det staar i direkte forbindelse med ertsens genesis.

I det følgende gaar vi, i henhold til de tidligere gjorte meddelelser, ud fra, at graniten er af eruptiv oprindelse. Vi vil specielt betone, at vore granitgange, som fortrinsvis findes i nærheden af granitgrænsen, maa være at opfatte som apofyser af graniten, cfr. kart over Bø grube (fig. no. 26). Gangene er altid jævnt krystallinsk-kornige og viser aldrig<sup>1)</sup> de særegne slags struktur-former, der ifølge *H. Credner*<sup>2)</sup> er karakteristiske for de ved sekretion dannede mineralgange, f. ex. for de af kvarts-feldspath-glimmer m. m. sammensatte gange, der gjennemsetter det sachsiske granulit-territorium. — Vore granitgange er heller ikke at sammenligne med de ordinære pegmatitgange, med typus Arendal- eller Mossegangene; muligens maa vi dog her fraregne enkelte af de gange, der gjennemsetter Klovereidnutens granit. — Støttet til de gjorte forudsætninger skal vi forsøge at analysere ertsens forhold til eruptiven.

Vort første punkt er, at ertsen i det hele og store spiller en ganske anden rolle end granitens ordinære bestanddele — hvilket fremgaar af, at ertsen jævnlig viser sig i gange, der gjennemsetter graniten, og at den endog fornemmelig optræder inde i de tilstødende skifere. — Som allerede ved de tidligere omhandlede ertsgrupper nøjere udviklet, slutter vi af dette forhold, at ertsen ikke kan være kommet frem i smeltet tilstand, men derimod under form af dampe eller

<sup>1)</sup> Naar muligens undtages en kvarts-feldspath-gang, der ikke er medtaget i vor opregning, i nærheden af Hemstvedt grube (Hvideseid).

<sup>2)</sup> Zeits. d. deutschen geol. Gesellsch. 1877.

opløsninger, og at forekomsterne er dannede ved hydatochemiske processer. — Vor ertsgruppe maa efter dette være at stille i klasse med de ægte ertsgange, og vi skal se, at der er mange paralleller.

Selve ertserne i Thelemarken og Sætersdalen er de samme som de, der i almindelighed træffes i de typiske gange, idet vi i vor gruppe finder:

kobberglans, brogetkobber, kobberkis;  
 blyglans, selenbly, zinkblende, arsenikkis, sølvglans;  
 vismuthglans, tellurvismuth, ged. vismuth, blybismuthit(?);  
 jernglans, titanjern, rutil;  
 gediegent sølv, guld, kobber etc.

Gangmineralerne er ogsaa de samme, om ligheden her vistnok ikke er udpræget; i Thelemarken træffes kvarts, kalkspath, flusspath m. m.

Det er jævnlig bleven fremholdt, at de Thelemark'ske gange altid hurtig skal tabe sig paa dybet, og *P. Herter* vil endog heraf uddrage et i theoretisk henseende vigtigt moment; erfaring viser dog, at den af ham forfægtede forestilling er urigtig. Den er fremkommet derved, at de rige nyrer, navnlig af brogetkobber, ofte snart kiler sig ud, men dette forhold kan kun udtydes paa den maade, at gangenes ertsføring er højst uregelmæssig; man kan heraf ikke slutte, at gangene selv stanser. — Paa det eneste sted i Thelemarken, hvor der har været foretaget noget virkelig betydeligt grubearbejde, nemlig i Hoffnung grube (Aamdals værk), har man fulgt lejestedet til ikke ganske uvæsentlig dyb (ca. 200 m. under fjeldets top), og det har herunder vist sig, ikke at gangen gaar ud, eller at ertsføringen gradvis taber sig, men tværtom, at gruben i det hele og store er rigere paa dybet end nær overfladen. — Ved Aamlid grube (Hvideseid), hvor der ogsaa er bleven udført ikke ganske uvæsentligt arbejde, havde man gang med erts i hele grubens bund, da driften stansedes. Af lignende eksempler kunde opføres en hel del.

Metalforbindelserne maa hist og her, om end kun ganske undtagelsesvis, have dannet sig til erts, forinden graniten gik over fra flydende til fast form; det ordinære var dog, i modsætning til, hvad tilfældet rimeligvis maa have været ved den yngre Kristiania-granit, at vore metalforbindelser først kom frem paa et lidt senere stadium, altsaa efter den egentlige granit-eruption. — Paa flere steder finder vi, at ertsen netop har trængt sig frem paa grænsen mellem granitgangene og de tilstødende skifere, dels tidligere (som et sted ved øvre Haukum, profil no. 24) og dels senere (som ved flere gange paa Strømshejen) end det tidspunkt, da graniten størknede. I ren geologisk henseende kan vi sammenligne disse punkter med de forskjellige slags forekomster af apatit og nikkelholdig magnetkis i gabbro (se foreløbig fremstilling i Geol. før.'s førh. 1883). — Ved to af hinanden aldeles uafhængige gange, (nemlig Næsmark og Naper, se kart, fig. no. 20 og 21) indtræffer det tilfælde, at ertsen sidder i smaa tvergange, der med stor regelmæssighed følger efter hinanden. Da det samme princip for spaltedannelsen gjentagende viser sig, maa vi slutte, at det maa være begrundet i forholde, der staar i direkte forbindelse med granitgangenes dannelse. — Vi ved, at de eruptive gange jævnlig gjennemsættes af kontraktions-spalter (fremkomne ved afkjølingen), som staar omtrent lodret paa gangvæggene, og som kommer efter hinanden i regelmæssig rækkefølge; der kan neppe herske nogensomhelst tvivl om, at det netop var langs de paa denne maade fremkomne aabninger, at ertsen i foreliggende tilfælde trængte frem.

I overensstemmelse hermed er det meget naturligt at antage, at ogsaa den svite af parallelle gange, som vi finder i Klovereidnuten, svarer til det vertikale afsondrings-system, som undertiden viser sig hos graniten. Saavel ved granitgangene som ved kvartsgangene kommer vi til det resultat, at der ikke gik nogen særegen spaltedannelse forud

for ertsens fremtrængen, og det er derfor rimelig, at saa heller ikke var tilfælde ved de i graniten optrædende forekomster.

Inde i skiferen fulgte ertsens dels større spalter og dels de smaa, fine aabninger, som jævnlig forefindes langs efter lagfladerne; i det første tilfælde fik vi som resultat gange, i det andet derimod falbaand. Som tidligere omtalt, falder gangene i to underafdelinger, eftersom de oprindelige spalter gik parallelt med lagene eller krydsede samme.

Vi finder jævnlig, at saavel ertsførende kvartsgange som falbaand udspringer fra granitgange, der selv holder erts; endvidere har vi oftere iagttaget, at granitgange endog i større afstand (adskillige kilom.) fra grænsen indeholder erts som primær bestanddel. Disse forhold kan neppe udtydes paa anden maade, end at de oprindelige metalforbindelser ved emanationen ofte i begyndelsen trængte frem langs efter granit-apofyserne<sup>1)</sup>, og at de først senere, udgaaende fra de eruptive gange, spadserede ind i skiferen. Paa denne maade kan vi forklare den store afstand, hvori ertsgangene kan fjerne sig fra hoved-graniten, endvidere det store antal gange samt det faktum, at de fleste forekomster kun fører meget lidet erts.

Efter forholdene ved Kobbernuten (Bykle) synes det, at paa enkelte steder har gange af kvartsdiorit bidraget til at bane vej for ertsens og muligens i enhver henseende spillet omtrent samme rolle som granitgangene ellers. — Efter *P. Herters* beskrivelse ser det ud til, at et lignende forhold ogsaa har fundet sted ved Guldnaes i Silgjord; dette tiltrænger dog nøjere redegjørelse.

Naar man tager for sig det geologiske kart over Thelemarken (i resumé gengivet ved fig. 20), sees det, at graniten

---

<sup>1)</sup> som synes i højden at fjerne sig ca. 10 kilom. fra grænsen.

et sted, nemlig i omegnen af Klovereid (Skafse), har skudt sig frem i en langt udspringende odde; rundt omkring samme findes en utallighed af forekomster, som, efter vor hypotese, maa være udgaaende fra eruptiven, hvilken altsaa maa have været »ladet med erts«. Naar vi holder os denne omstændighed for øje, vil vi finde det meget naturligt, at ertsen for en del ogsaa afsatte sig inde i selve graniten og derved gav ophav til den temmelig udstrakte forekomst ved Klovereid. Vi faar altsaa som det sandsynlige resultat, at den topografiske beliggenhed af den nævnte forekomst ikke er at anse som en ren tilfældighed.

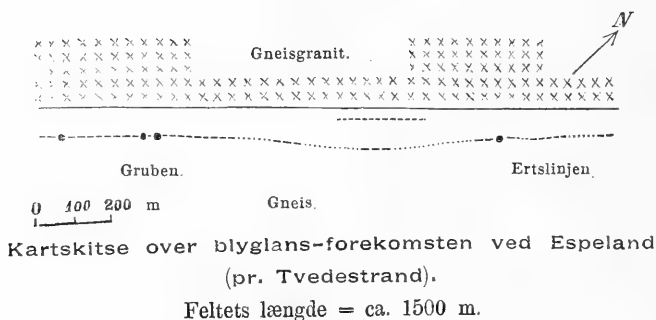
Hvor metalforbindelserne trængte frem, blev de tilstødende bergarter, ligegyldigt, om disse bestod af granit eller af forskellige slags skifere, jævnlige metamorfoserede, et forhold, som vi ogsaa har lært at kjende ved de tidligere beskrevne ertsgrupper.

De mange vekslende ertskombinationer maa bero paa, at vore metalforbindelser paa de forskellige steder havde en vekslende kemisk sammensætning eller bestod af forskellige elementer. — Kobber og jern var paa de fleste steder dominerende; kun hist og her erstattedes de af bly med lidt zink etc., og kun i et eller et par lokalt begrænsede felt ledsagedes de af vismuth. Titan optraadte kun meget sjelden. Sølv og guld var antagelig overalt tilstede, men altid kun i meget ringe mængde. — Efter det relative forhold mellem den forhaanden værende mængde svovl paa den ene side og kobber med jern paa den anden har, som tidligere omtalt, fremgaaet følgende ertskombinationer: kobberglans med jernglans og undertiden med brogetkobber — brogetkobber med kobberglans, kobberkis eller jernglans — kobberkis, i regelen ikke ledsaget af andre ertser.

---

*Tillæg. Blyglans-forekomsten ved Espeland* (pr. Tvedestrand). — I forbindelse med den Thelemark—Sætersdal'ske ertsformation vil vi medtage en kort beskrivelse af en forekomst af sølvholdig blyglans m. m. i nærheden af Espeland (pr. Tvedestrand)<sup>1)</sup>. — I muligens et par kilom.s længde er gneisen her et sted impregneret med forskellige ertser, hovedsagelig sølvholdig blyglans (efter opgivende med 0.25—0.65 % sølv), desuden zinkblende, magnetkis, arsenikkis m. m. Mægtigheden af det ertsførende parti er i regelen ca. 1 m. Ved et for nogle aar siden paabegyndt grubearbejde, hvorved lejestedet er bleven fulgt i fald ca. 50 m. og i felt ca. 140 m., har det vist sig, at ertsen i de undersøgte partier overalt holdt sig i et og samme lag; af oversigtskartet (se fig. no. 27) fremgaar det, at ogsaa i det store sidder

Fig. 27.



ertsen altid i antagelig nøjagtig samme niveau. I den del, jeg nøjere har opgaaet (af længde ca. 1500 m.) kan niveau-differancen paa de to yderpunkter i max. være 50 m., men er rimeligvis lig 0. — Afstanden mellem ertslinjen og grænsen mellem grundfjeldet og den tilstødende gneisgranit (efter de geologiske karter det yderste parti af det store Thele-

<sup>1)</sup> Omtalt af *Th. Kjerulf* i »Stenriget og Fjeldlæren« og i »Udsigt over d. sydl. Norges geologi«, pag. 256, som optrædende nær granitgrænsen.

mark—Sætersdal'ske felt) er overalt meget liden; paa de forskjellige steder maalttes den til 73, 75, 83, 103, 92 og 78 m. (se kartet). — Gneisgraniten er grovkornig, stærkt folieret, men uden differente lag.

I de impregnerede partier sidder ertsen gjerne sammen med kvarts; i de egentlig ertsførende gneislag (paa begge sider af kvartslejet) følger ertsen i regelen skikterne, men overskjærer ogsaa samme hist og her.

Mellem den lange ertslinje og granitgrænsen sees et sted et par smaa falbaand, der fører magnetkis og svovlkis, muligens desuden spor af blyglans.

Forekomsten gjør ved første øjekast ubetinget indtryk af at være af sedimentær oprindelse, altsaa tilhørende skikterne; men naar man har seet, hvorledes det store granit- eller gneisgranit-felt paa hele nordsiden omgiver sig med ertser, og naar desuden betænkes den store lighed, vor forekomst har med f. ex. Bø grube (se kart, fig. no. 26), opdukker det spørgsmaal, om ikke ogsaa Espelands forekomst muligens afhænger af graniten eller gneisgraniten. Vi har ikke tilstrækkeligt material til at løse problemet, men jeg har alligevel ikke villet undlade at medtage beskrivelse af forekomsten.

Efter privat meddelelse skal ogsaa Birkelands zinkblende-forekomst (i Søvde, Ryfylke) ligge i nærheden af grænsen af det samme store gneisgranit-felt.

---

## IV.

## De sølvertsførende gange ved Svenningdalen (Vefsen).

---

*Literatur.* Hans H. Reusch. Et besøg i Svenningdalens sølvgruber. Nyt mag. f. naturv. B. 26. 1881.

---

Den i næsten hele Vefsendalen (i den søndre del af Nordlands amt) herskende bergart er en graa, tykbænket kalksten, som i regelen indeholder glimmerskjæl og linser af kvarts, og som veksellagrer med nogle skikter af gneis, glimmerskifer, hornblendeskifer m. m. Paa flere steder, fornemmelig mellem Laxfos og Svenningdalens annexkirke (et par kilom. S. for vort ertsfelt), afbrydes kalksten-formationen, som paa det af dr. *T. Dahll* udgivne geologiske kart over det nordlige Norge regnes for at være af kambrisk oprindelse, ved nogle felter af gneisgranit, se herom *H. H. Reusch's* beskrivelse.

Svenningaasen, hvori de ertsførende gange optræder, (se kart og profil, fig. no. 29 og 30) er beliggende ca. 45 kilom. S. for Mosjøen lige ved Vefselven; den er ca. 140 m. høj (over dalbunden<sup>1)</sup>), ca. 1 kilom. lang og danner det yderste led i det V. for Vefsendalen værende fjeldparti. Aasen bestaar af kalksten med gneis, glimmerskifer, hornblendeskifer samt nogle partier af gneisgranit; V. for det egentlige gangdistrikt strækker den sidstnævnte bergart sig i kompakt masse. Gneisgraniten er i regelen lysegraa, viser stærkt udpræget foliation og er oftest meget monoton.

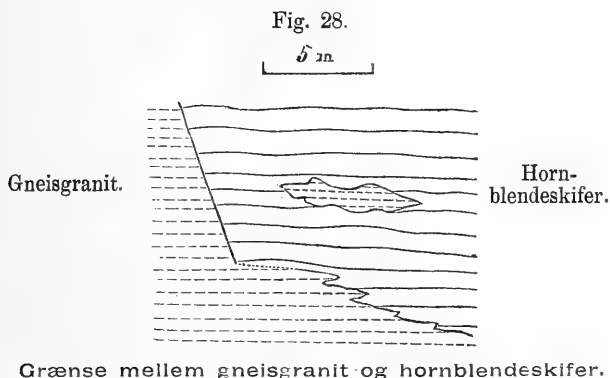
*H. H. Reusch* har ved et par profiler illustreret forholdet mellem gneisgraniten og skifersystemet ved nogle grænsepunkter i selve Vefsendalen; det sees, at gneisgraniten ved

---

<sup>1)</sup> der ligger ca. 80 m. over havet.



grænsen overskjærer skikterne, og at den udsender gange, der uden nogensomhelst orden gjennemkrydser lagene. Aldeles lignende oplysninger faar vi ogsaa fra selve Svenningaasen. — I det hele og store viser gneisgraniten sig her oppe i dagen konform med lagene, men gaar man nøjere i detail, sees ogsaa her overskjæringer m. m. Den lille kartskitse, fig. no. 28 (fra et parti af gneisgranit i den centrale del af Svenningaasen, nær hovedgruben) viser, hvorledes



gneisgraniten et sted med knivskarp grænse afskjærer hornblendeskiferens lag; man tror først at have for sig en forkastning, men saa er ikke tilfælde, idet grænselinjen ikke fortsætter inde i gneisgraniten. Foliationen i sidstnævnte bergart gaar overalt parallelt med partiernes længde-udstrækning, altsaa med kalkstenens og gneisens strøg; ogsaa paa det punkt, hvor gneisgraniten krydser skikterne, beholder glimmerbladene den ordinære retning, se kartskitsen. — Ved grubeafbygningen har det vist sig, at de partier af gneisgranit, som man oppe i dagen først fristes til at holde for lag, der veksler med de sedimentære bergarter, paa flere steder optræder som gange, der overskjærer skiktsystemet; om dette forhold oplyser fig. no. 32, profil langs hovedgrubens gang (optaget af bestyrer for Svenningdalens hovedgrube,

hr. bergkand. *T. Lassen*, og af ham velvillig stillet til min disposition).

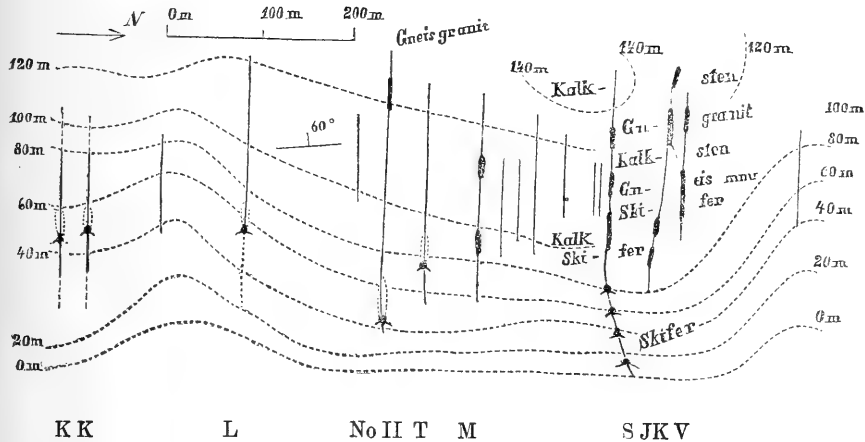
Efter disse ganske korte bemærkninger om de generelle forholde skal vi vende os til selve ertsforekomsten. — Som kart<sup>1)</sup> og profil (fig. no 29 og 30) viser, er hele Svenningaasen gjennemsat af et typisk system af næsten fuldstændig parallelle ertsgange, der under ca. 90°'s vinkel skjærer tvert gennem de forskellige lag. Hidtil kjendes 20—25 gange; ved nøjere undersøgelse vil man antagelig finde mange flere. Den indbyrdes afstand mellem de hidtil kjendte gange er oftest 10—50 m.; gangenes længde er i max. ca. 300 m. Spalterne krydser gennem kalksten med tilhørende skifer samt gennem de partier af gneisgranit, som findes i den egentlige Svenningaas; derimod synes de at stanse ved grænsen mod det store felt af gneisgranit. Oppe i dagen har man i alle fald trods ivrig søgen ikke kunnet finde fortsættelsen af gangene eller gangspalterne inde i det egentlige gneisgranit-territorium, men det er jo mulig, at man ved undersøgelse paa dybet kan opdage, at gangene gaar lidt ind i samme. Da spalterne er yngre end de partier af gneisgranit, som findes i selve Svenningaasen, maa man kunne slutte, at de ogsaa er yngre end det store felt; gneisgraniten har altsaa ikke afskaaret gangene, men den spaltende kraft har ikke eller kun i ringe grad formaaet at sønderdele den faste og kompakte bergart.

I regelen gaar spalterne uden nogensomhelst forandring over fra kalkstenbænkene til de relativt lidet mægtige lag af gneis m. m.; de passerer altsaa uden videre gennem bergarter, som i fysisk henseende differerer ganske betydelig fra hinanden. Kun undtagelsesvis hænder det, at spalterne

---

<sup>1)</sup> Kartet er kun en foreløbig skitse, optaget af mig ved sigtning og maa-  
ling med meter-maal; det er tilstrækkelig til at give klarhed om forhol-  
dene i sin almindelighed, men det er ikke nøjagtigt i detaillene.

Fig. 29 og 30.



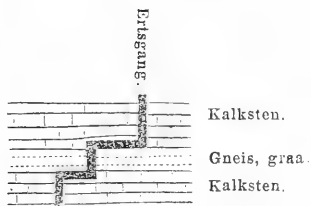
Kartskitse og profil over de sølvertførende gange  
i Svenningaasen (Vefsen).

(Maalestok 1 : 8000. — Den indbyrdes afstand mellem højdekurverne er ca. 20 m.)

|         |                      |     |                            |
|---------|----------------------|-----|----------------------------|
| KK.     | Kovhøgen.            | M.  | Mellemgruben.              |
| L.      | Løplid.              | S.  | Svenningdalens hovedgrube. |
| No. II. | Svenningdalen no. 2. | JK. | Jakob Knudsen.             |
| T.      | Tythøgen.            | V.  | Victoria.                  |

er blevne noget afbøjede netop paa grænsen mellem kalkstenen og gneisen, saaledes som den lille kartskitse, fig. no. 31, fra et punkt ved gang »Svenningdal no. II« udviser. Et andet sted, nemlig i den øvre del af »J. Knudsen« gang, hænder det, at den fra kalkstenen kommende hovedspalte afsender en liden sidedrum omtrent paa det punkt, hvor gangen gaar over fra kalksten til gneis. — Meget betydelige forkastninger langs gangspalterne kan ikke have fundet sted, idet lagene i det hele og store overalt korresponderer med hinanden, se f. ex. fig. 31. Nogle, antagelig temmelig smaa, glidninger maa dog hist og her have foregaaet, hvilket sluttes deraf, at gangvæggene undertiden udviser glidflader.

Fig. 31.



Kartskitse fra Svenningdals grube no. II (af længde ca. 10 m.)

Gangenes fald er i almindelighed meget regelmæssigt, om der end ogsaa her er undtagelser; den vigtigste af disse bestaar deri, at »J. Knudsen« gang staar omtrent vertikalt eller falder ca.  $85^\circ$  mod N., medens næsten alle de øvrige gange har fald ca.  $60^\circ$  mod N.

Gangenes mægtighed varierer mellem ca. 0.1 og ca. 1 m., er i regelen ca. 0.2 m.

De i gangene optrædende ertser er følgende:

*Fahlerts*, som altid holder et par % sølv, efter analyserne i noget vekslende mængde. Den største gehalt, nogen analyse har udvist, er 4.65 % sølv (fahlerts fra Svenningdals hovedgrube — efter velvillig meddelelse af *T. Lassen*). En analyse af fahlerts viste 33.1 % kobber.

*Blyglans*, ogsaa altid med sølv, i vekslende mængde, i regelen med ca. 0.2–0.3 % sølv; en af mig undersøgt blyglans-prøve fra en gang lidt S. for Svenningdalens hovedgrube holdt 0.80 % sølv, hvilket antagelig er maximums-gehalten i Svenningaasen.

*Rødgyldegerts* sees hist og her, om end meget sjelden; den viser sig altid i meget smaa individer. I et lidet druse-rum saaes smaa, vakre krystaller. — Sølvglans og bournonit er antagelig ogsaa hist og her forhaanden.

*Zinkblende*, mørkebrun, tilstede i temmelig rigelig mængde.

*Arsenikkis*, ogsaa i rigelig mængde, altid med lidt sølv (0.007–0.031, oftest ca. 0.02 % sølv).

Endvidere findes en del *magnetkis*, *svovlkis*, *kobberkis* samt *antimon-glans* m. m.

I regelen optræder ertsen i meget smaa individer, saa det er vanskelig at faa aldeles rent material til chemisk undersøgelse. Endvidere kan man ikke skeide hver slags erts ud for sig, naar undtages, at arsenikkisen hyppig er saa ren og samlet, at den kan holdes ud alene.

Ved det i hovedgruben (no. I) foretagne arbejde, som paabegyndtes sommeren 1878, og som senere er bleven fortsat med en arbejdsstyrke paa i almindelighed 40–60 mand, har man hidtil skeidet de uvundne produkter i nogenlunde ren erts (første og anden sort), hvortil er lagt alt, der i tilstrækkelig mængde har holdt et eller andet sølvførende mineral<sup>1)</sup>, samt i pukmalm. — Den bedste sorts erts (export-ertsen), som selvfølgelig altid har været blandet med en del uholdigt gangberg (kvarts m. m.), har holdt sølv mellem ydergrænser 0.25–0.30 % og 1.9 %; oftest har gehalten været 0.5–0.6 % (i gjennemsni-prøver af partier paa ca.  $\frac{1}{4}$ –1 ton). Ertsen

<sup>1)</sup> Denne erts er hidtil bleven exporteret til Freiberg, Sachsen; transport-udgifterne beløber sig til ca. kr. 48 pr. ton, saa ertsen maa udskedes temmelig rig for at kunne bære fragten. — Betaling pr. ton erts med 0.5 eller 0.6 % sølv er i Freiberg resp. ca. 510 og 625 kr.

holder desuden altid lidt guld, gjerne noget over 1 del guld til 1000 dele sølv; der er saa meget guld tilstede, at derved i regelen en større del af transportudgifterne dækkes.

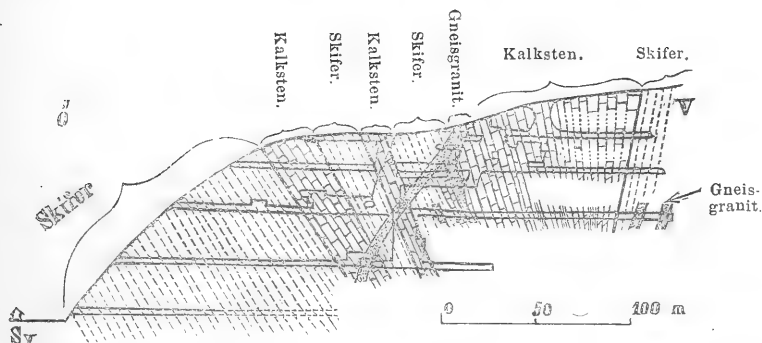
Af den ikke ubetydelige sølvgehalt kan sluttes, at ertsen maa holde temmelig meget af de nogenlunde sølvrige mineraler. Fahlerts er overalt tilstede; desuden er rimeligvis i regelen forhaanden lidt rødgyldigerts, sølvglans eller lignende, om end vistnok i saa smaa individer, at de enkelte korn ikke kan sees.

Det eneste af de uholdige gangmineraller, som spiller nogen rolle, er kvarts; kalkspath er hist og her tilstede, men altid i ganske forsvindende mængde. — Dette forhold er temmelig ejendommeligt, naar det betænkes, at den væsentligste bestanddel i de bergarter, som gangene gjennemsætter, dannes af  $\text{CaCO}_3$ . Hvis gangminerallerne var fremkomne ved udludning af sidestenen, maatte man ubetinget vente, at kalkspath skulde dominere paa gangene, men saa er ikke tilfælde. Druserum, beklædte med krystaller, findes kun overmaade sjelden; nogen slags baand-struktur er, saavidt vides, aldrig bemærket.

Ertsens fordeling paa gangfladen er i allerhøjeste grad uregelmæssig. Det eneste sted, hvor der hidtil (o: ved mit besøg, sommeren 1883) er udført noget større grubearbejde, er i Svenningdals grube no. I (hovedgruben), se profil, fig. 32; vi skal ganske kort gennemgaa de resultater, gruben til dato har leveret. Paa de steder i grubens øvre del, hvor omtrent hele gangfladen er afbygget, havde man for sig et meget rigt ertsparti (i det hele af længde ca. 140 m.); kun de dele af dette, som leverede saa god erts, at denne uden videre kunde exporteres, er udminerede, medens de relativt fattige dele, som hovedsagelig vil levere pukmalm, fremdeles staar igjen. Ved drift paa dybet viste det sig, at det ertsførende parti (i ca. 60 m.s vertikalt dyb) kilte sig ud; de to nedre stoller er inddrevne i 200—250 m.s længde, uden at

man har truffet andet end hist og her nogle smaa ertsklatter, fornemmelig bestaaende af svovlkis og arsenikkis. Selve gangen fortsætter som ellers og har den vanlige mægtighed, men den er næsten udelukkende fyldt med kvarts. I hoved-

Fig. 32.



Profil langs Svenningdalens hovedgrube, visende de afbyggede gruberum samt de optrædende bergarter.

Sv. Svenningdalen gaard.

grubens gang foregaar for øjeblikket undersøgelsesarbejde paa dybet (under den nederste stoll). — Ved tverslag fra samme grube har man truffet et par nærliggende gange, som nu afbygges.

For at man kan faa idé om ertsføringen kan meddeles følgende statistiske oplysninger, som fornemmelig er tagne af de aarlig udgivne driftsberetninger. — Indtil 1ste januar 1883 havde (efter aflæsning paa grubekarterne) det afbyggede parti i den ertsrige del af gangfladen en udstrækning af ca. 4400 m<sup>2</sup> <sup>1)</sup> (regnet efter gangfladen). Den første sorts erts

<sup>1)</sup> Heri er, efter karterne, medtaget for det første hele den afstrossede gangflade, altsaa baade den ertsholdige del af samme og de uholdige dele, som man af lokale hensyn maatte afbygge, og for det andet alle de stoller og orter, som passerer gennem ertsmiddelet.

(af vægt  $647\frac{2}{3}$  ton)<sup>1)</sup>, som herved var bleven udvundet, havde en samlet værdi af ca. 383,000 kr.<sup>2)</sup> 0: 1 m<sup>2</sup> gangflade i det ertsrige parti har gjennemsnitlig leveret export-erts af værdi ca. 87 kr. — Hertil kommer endvidere, at der ved det samme arbejde blev udvundet en hel del pukmalm<sup>3)</sup>, hvis værdi af grubens bestyrer blev anslaaet til kr. 100,000; medtages denne erts, faaes som resultat,

at i det ertsrige parti i Svenningdalens hovedgrube (af udstrækning ca 4400 m<sup>2</sup> gangflade) leveredes gjennemsnitlig pr. m<sup>2</sup> gangflade erts af værdi ca. kr. 110.

Til sammenligning skal vi levere driftsresultaterne fra de Freiberg'ske gruber, som tilsammen beskjæftiger ca. 5000 arbejdere, og som i det hele og store gaar med nogle, om end ikke mange, procents overskud. Til orientering meddeles, at mægtigheden i saavel de Freiberg'ske som Svenningdal'ske gange i det hele er omtrent lige stor, de optrædende ertser er ogsaa omtrent de samme, saa der er temmelig stor analogi mellem de to gangdistrikter. Endelig er ertsen saavel fra Svenningdalen som fra Freiberg kjøbt efter samme ertstaxt. Ifølge sammenstillen af de statistiske resultater<sup>4)</sup> leveredes i de Freiberg'ske ertsgange i de tre decennier 1851—1861, 1862—71 og 1872—81 pr. m<sup>2</sup> af den hele gangflade (heri medregnet saavel den holdige som den uholdige del) gjennemsnitlig erts af værdi resp. 39.50, 46 og 51 Mark; omtrent 25 % af det hele arbejde blev udført i de uholdige

<sup>1)</sup> Heri ogsaa medtaget et par ton fra nogle sidegange.

<sup>2)</sup> Udgifter i samme tidsrum var tilsammen ca. kr. 245,000, hvori indgaar temmelig store beløb til nye anlæg.

<sup>3)</sup> Anm. Hvilken man ved nys opført opberedningsværk snart skal tilgodegjøre. Mai 1884.

<sup>4)</sup> se *Gottschalk*: Ueber die durchschnittliche Ergiebigkeit der Freiburger Erzgänge. Jahrb. f. d. Berg-und Hüttenwesen Sachsens, 1883.



partier (som forsøgsdrift), hvoraf resultater, at de afstrossede, drivværdige dele af de Freiberg'ske gange har leveret erts af gennemsnitlig værdi resp. ca. 47, 55 og 61 kr.

Det bemærkes, at hvis man i Svenningdalen havde arbejdet under de samme lokale vilkaar som i Freiberg, saa vilde man have medtaget større dele af de fattige gangpartier; produktionen pr. m<sup>2</sup> vilde altsaa være sunket. Desuden er der den meget væsentlige forskjel, at i de Freiberg'ske gange er der paa langt nær ikke saa stor afstand mellem de enkelte ertsmidler, som tilfældet er i Svenningdalen (at dømme efter resultaterne i hovedgruben).

Kun ved grube no. I har der hidtil været udført saa betydeligt arbejde, at statistiske resultater heraf kan erhverves. Saavidt det kan skjønnes, indtager gangen i hovedgruben ingensomhelst særstilling; den ligger midt inde mellem de øvrige gange, og der er al grund til at antage, at hvad der gjælder for den ene, gjælder ogsaa for de øvrige. — Af disse har »J. Knudsen« og »Victoria« grubes gange, som er beliggende i kun meget kort strækning (ca. 60 m.) N. for hovedgruben, men som alligevel først blev fundne adskillige aar efter samme, i det senere tiltrukket sig den største opmærksomhed; man afbygger her ertspartier af antagelig omtrent samme rigdom som i det rige parti i hovedgruben, men statistiske resultater kan ikke leveres, og heller ikke kan meddeles, hvor stor udstrækning ertsmidlerne har. — Ved gangene i feltets søndre del er der kun udført meget lidet arbejde; oppe i dagen kjendes her, saavidt vides, intet særdeles rigt ertsparti, men gangene holder dog paa flere steder saa meget erts, -at det antagelig kan lønne sig at drive dem, naar de fattige ertsmasser strax kan anriges i opberedningsværk.

Det ertsrige parti i hovedgruben holdt sig fornemmelig i de dele af gangfladen, hvor denne gennemskar lag af kalksten; det samme synes, saavidt det ved mit besøg (1883)

kunde afgjøres, i det hele og store ogsaa at være tilfælde med ertsmidlerne i »J. Knudsen« og »Victoria« gange. Det er mulig, at vi her staar lige over for en regel af lignende beskaffenhed som den, vi tidligere har omtalt ved Stølsvig grube, se pag. 291—292. Forholdet maa dog ikke opfattes paa den maade, at gangene overalt skal være rige, hvor de sætter gjennem kalksten, derimod fattige, hvor de sætter gjennem gneis og de forskjellige slags skifere, idet vi nemlig allerede har seet, at hovedgruben i niveau med de to nedre stoller ogsaa er fattig paa de steder, hvor gangen passerer kalksten. Derimod lyder vor regel, at de ertsrige partier synes fortrinsvis at optræde i de dele, hvor gangen har kalksten til side-bergart.

I det hele og store giver det Svenningdal'ske ertsfelt meget smukke forhaabninger: der er gange i overflod, og gangenes felt er tilstrækkelig stort; der er, efter analogi med tilsvarende gangdistrikter, f. ex. Kongsbergs, Freibergs, Ober-Harz's, aldeles betryggende grund til at forudsætte, at gangspalterne og med dem i det hele og store ogsaa ertsføringen fortsætter paa dybet, saalangt man ved menneskeligt arbejde kan naa ned; de ertsførende partier af gangfladen er ofte meget rige, om de end, som vi har seet, er lokalt begrænsede, en omstændighed, som naturligvis er højst generende. Af sidstnævnte forhold maa de økonomiske resultater ved hver enkelt gang være underkastet meget stærke fluktuationer, og en parmanent, solid grubedrift kan kun finde sted, naar flere gange eller helst det hele ertsfelt drives under fælles administration. Man kan ikke undlade at beklage, at de mange gange nu er spredt paa en mængde forskellige hænder.

---

I hele Skandinavien har man, saavidt jeg kan indse, hidtil kun kjendt en eneste formation af ægte, typiske ertsgange, der i enhver henseende er svarende til de bekjendte udenlandske gangsystemer, med typus Erzgebirge og Harz; denne ene formation findes ved Kongsberg<sup>1)</sup>. Som no. 2 af de ægte gangsystemer i Skandinavien indgaar nu det Svenningdal'ske felt.

Saavel i Vefsen som ved Kongsberg har spaltetdannelsen gaaet for sig paa omtrent samme maade, idet man som resultat har faaet en svite indbyrdes parallelle gange, som gaar normalt paa skikterne, og som følger efter hinanden i retning af de resp. skiferes strøg: — Ogsaa med hensyn til ertsens fordeling paa gangfladen er der stor lighed mellem de to norske gangdistrikter, idet begge udmærker sig ved overordentlig stor uregelmæssighed. — I Vefsen er den hele ertsmasse rimeligvis bleven dannet ved en enkelt proces, hvilket sluttet deraf, at man ikke noget sted ser baand-struktur, eller hvad dermed staar i forbindelse; ogsaa ved Kongsberg har den egentlige ertsdannelse antagelig gaaet for sig i en relativt kortvarig tidsperiode. Ved flere af de udenlandske gangsystemer, f. ex. det i Erzgebirge, derimod maa

---

<sup>1)</sup> I Sverrige kjendes neppe noget hidhørende gangfelt. I Norge kunde man tænke paa de Thelemark'ske gange, blyglans-zinkblende-forekomsterne med typus Konerudkollen og sølv-kobbernikkel-forekomsterne med typus Stølsvig (se de tidligere afsnit), men ikke paa noget af disse steder kan selve spaltetdannelsen sammenlignes med den, der har fundet sted ved f. ex. Kongsberg, Svenningdalen, Harz, Erzgebirge. — Det kan bemærkes, at forekomsterne af fahlerts, blyglans, zinkblende m. m. paa Hitteren maa opfattes som lejetormige gange; den opspaltende kraft har her maattet rette sig efter de temmelig fladt faldende gneislag. Forøvrigt er der i mineralogisk henseende meget stor lighed mellem gangene paa Hitteren og i Svenningaasen; begge steder spiller blyglans og fahlerts en stærkt fremtrædende rolle, og endog ertsernes sølvgehalt stemmer overens. (Fahlerts fra Hitteren holder efter forskjellige analyser 2.8, 2.9 og 3.34 % sølv). Som gangmineral indgaar paa Hitteren kalkspath med lidt kvarts; desuden holder gangene en mængde brudstykker af de tilstødende gneislag.

man formode, at ertsdannelsen har fortsat i overmaade lange tidsrum, idet man for det første kan dele gangene i formationer, hvøraf den ene er yngre end den anden, og idet man dernæst inden hver enkelt formation kan øjne en svite stadier, der ofte i væsentlig grad afviger fra hinanden.

---

Tilslut vil vi gjøre opmærksom paa, at Svenningdalens gangsystem ligger midt inde i et meget udstrakt ertsdistrikt, der viser talrige forekomster af fahlerts, blyglans, zinkblende m. m. Distriktet strækker sig, saavidt vides, fra omegnen af Møsjøen i N. til Hatfjeldalen i S. (i mindst 80 kilom.s længde); dets bredde kan her ikke opgives. Da ertserne overalt er de samme <sup>1)</sup>, og da forekomsterne i topografisk henseende synes at danne et sluttet felt, maa det antages, at ertsen overalt er dannet efter et og samme hovedprincip.

I den nordre del af Vefsendalen besøgte jeg flere af de hidhørende anvisninger; overalt optraadte ertsen i tilsyneladende falbaand, indsprængt i visse kalklag; ertsgange saaes intetsteds. Det er ikke usandsynligt, at der i Vefsen hersker omtrent samme slags forbindelse mellem ertsgange og falbaand som i Thelemarken, se herom i forrige afsnit.

Da distriktet Møsjøen—Hatfjeldalen i geologisk henseende er meget lidet undersøgt, kan der paa det nuværende stadium ikke være tale om at paavise nogen bestemt proces, f. ex. eruption af en eller anden bergart, som skulde have givet anledning til ertsens dannelse. Om f. ex. gneisgraniten

---

<sup>1)</sup> Endog sølvgehalten i blyglansen og fahlertsen stemmer nogenlunde overens, idet, efter *O. N. Hagens* beskrivelse, se *Magazin for bergmands- efterretninger*, 1881, blyglansen fra forskjellige steder i Hatfjeldalen holder 0.14, 0.27, 0.28, 0.29 og 0.37 % sølv og fahlertsen 0.73, 1.75, 1.76 og 2.96 % sølv.

har spillet en eller anden rolle, har vi ikke material til at afgjøre. — Saavidt det kan indsees, vil de undersøgelser, hvis maal her er skitserede, blive meget vanskelige at udføre.

---

NB. En sammenstilling af de ved de tre første ertsgrupper vundne resultater og sammenligning mellem de nævnte grupper indbyrdes og med forskellige udenlandske ertsgrupper udsættes, indtil vi har faaet anledning til nøjere at gennemgaa den gruppe, som dannes af vore til gabbro knyttede forekomster af apatit og nikkelholdig magnetkis.

---

# Untersuchungen über Transformationsgruppen I.

Von

SOPHUS LIE.

In dieser Arbeit stelle ich eine Reihe von getrennten Untersuchungen, die sich indess sämmtlich auf Transformationsgruppen beziehen, zusammen.

## § 1.

### Ueber continuirliche Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene.

Diejenige Bestimmung aller Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene, die ich in Math. Ann. XVI ausführlich und erschöpfend durchgeführt habe, soll in diesem Paragraphen in einigen Detailen vereinfacht werden. Gleichzeitig reproducire ich einige wichtige synthetische Betrachtungen, die in der citirten Arbeit in analytischer Form dargestellt wurden.

1. Um in einfacher und elementarer Weise alle Gruppen der Form

$$X_1(x)q, X_2q \dots X_rq, p + \eta q$$

zu finden kann man folgendermassen verfahren.

Es bestehen Relationen der Form

$$(X_kq, p + \eta q) = \sum c_{ki} \cdot X_iq$$

welche zeigen, dass  $\eta$  die Form

$$\eta = f_1(x) \cdot y + f(x)$$

besitzt. Daher ist es immer möglich eine solche Grösse  $y\Phi(x) + \Phi_1(x)$  als neues  $y$  einzuführen, dass unsere Gruppe die Form

$$X_1q X_2q \dots X_rq p$$

erhält. Alsdann bestehen Relationen der Form

$$X'_k = c_{k1} X_1 + c_{k2} X_2 + \dots + c_{kr} X_r$$

$$X_k'' = d_{k1} X_1 + d_{k2} X_2 + \dots + d_{kr} X_r$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_k^{(r)} = l_{k1} X_1 + \dots\dots\dots + l_{kr} X_r$$

welche zeigen, dass  $X_k$  eine lineare Differentialgleichung  $r^{ter}$  Ordnung mit constanten Coefficienten

$$a_r X^{(r)} + a_{r-1} X^{(r-1)} + \dots + a_1 X' + a X = 0 \quad (1)$$

erfüllt. Es ist dabei leicht zu erkennen, dass man annehmen darf, dass die Coefficienten  $a_i$  nicht von dem Ind  $exk$  abhängen, dass es also eine Gleichung (1) giebt, die gleichzeitig von  $X_1 X_2 \dots X_r$  erfüllt wird.

Es ist in der That immer möglich diejenige Differentialgleichung *niedrigster* Ordnung und mit constanten Coefficienten

$$X^{(\rho)} + b_{\rho-1} X^{(\rho-1)} + \dots + b_1 X' + b X = 0$$

zu bilden, die sowohl von  $X_r$  wie von *allen* Differentialquotienten  $X_r^{(i)}$  befriedigt wird. Nach dem Vorangehenden ist  $\rho$  jedenfalls nicht grösser als  $r$ . Ist  $\rho = r$ , so ist

$$X_rq X'_rq \dots X_r^{(r-1)}q, p$$

offenbar eine Form unserer Gruppe; und daher ist unsere Behauptung erwiesen für den Fall  $\rho = r$ .

Ist  $\rho < r$ , so können wir uns die  $X_k$  derart gewählt denken, dass

$$X_rq, X'_rq \dots X_r^{(\rho-1)}q X_1q, X_2q \dots X_{r-\rho}q, p$$

eine Form unserer Gruppe darstellt. Hiernach bilden wir

diejenige lineare Differentialgleichung mit *constanten* Coefficienten und von *niedrigster* Ordnung

$$X^{(\rho+\rho')} + c_{\rho+\rho'-1} X^{(\rho+\rho'-1)} + \dots + c_1 X' + c X = 0$$

die nicht allein von  $X_r X'_r \dots X_r^{(\rho-1)}$  sondern gleichzeitig auch von  $X_{r-\rho} X'_{r-\rho} \dots$  und überhaupt von allen Differentialquotienten  $X_{r-\rho}^{(i)}$  erfüllt wird. Ist dabei die Zahl  $\rho + \rho'$  die jedenfalls nicht grösser als  $r$  sein kann, eben gleich  $r$ , so ist die Richtigkeit meines Satzes erwiesen. Ist  $\rho + \rho' < r$ , so bringt man die Gruppe auf die Form

$$\begin{aligned} X_r q, X'_r q \dots X_r^{(\rho-1)} q, X_{r-\rho} q, X'_{r-\rho} q \dots X_{r-\rho}^{(\rho'-1)} q \\ X_1 q, X_2 q \dots X_{r-\rho-\rho'} q, p \end{aligned}$$

und bildet diejenige lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten und von niedrigster Ordnung

$$X^{(\rho+\rho'+\rho'')} + \dots + d_1 X' + d X = 0,$$

die von  $X_r, X_{r-\rho}, X_{r-\rho-\rho'}$  und *allen* zugehörigen Differentialquotienten erfüllt wird. u. s. w.

Mann erkennt also unter allen Umständen die Richtigkeit meines alten Satzes:

*Satz.* Jede Gruppe  $X_k q p + \eta q$  ist reductibel auf die Form  $X_1 q X_2 q \dots X_i q p$ . Dabei sind die  $X$  definiert durch eine lineare Differentialgleichung  $r^{\text{ter}}$  Ordnung

$$X^{(r)} + a_{r-1} X^{(r-1)} + \dots + a_1 X' + a X = 0$$

mit constanten Coefficienten. Diese Gleichung kann übrigens im Allgemeinen in mehrere derartige Gleichungen zerlegt werden.

2. Besitzt eine Gruppe die Form

$$X_k(x)q, yq, p + \eta q,$$

so erkennt man sogleich, dass  $\eta$  die Form  $y f(x)$  besitzt. Führt man hiernach eine zweckmässige Grösse der Form  $y F(x)$  als neues  $y$  ein, so erhält unsere Gruppe die Form

$$X_1 q \dots X_r q y q p$$



und da die inf. Transformationen  $X_k q p$  eine Untergruppe erzeugen, so geben die Entwicklungen der vorangehenden Nummer unmittelbar den Satz.

*Satz.* Jede Gruppe  $X_k q y q p + \eta q$  ist reductibel auf die Form  $X_1 q \dots X_r q, y q, p$ ; dabei sind die  $X$  definiert durch eine lineare Differentialgleichung  $r^{\text{ter}}$  Ordnung

$$X^{(r)} + a_{r-1} X^{(r-1)} + \dots + a X = 0$$

mit constanten Coefficienten.

3. Besitzt eine Gruppe die Form

$$X_1 q \dots X_r q, p + \eta_0 q, x p + \eta q,$$

so ist nach dem Obenstehen den zunächst klar, dass  $\eta_0$  gleich Null gesetzt werden kann. Dabei zeigen die Relationen

$$\begin{aligned} (X_k q, x p + \eta q) &= \sum c_{ki} X_i q \\ (p, x p + \eta q) &= p + \sum d_{ki} X_i q \end{aligned}$$

dass  $\eta$  die Form

$$\eta = c y + f(x) \quad (c = \text{Const.})$$

besitzt. Bezeichnen wir daher mit  $X$  eine beliebige unter den  $X_k$ , so erkennen wir durch Bildung von den Ausdrücken  $(p, X q)$   $(x p + (c y + f) q, X q)$  die Existenz von Relationen der Form

$$X' = \sum a X, \quad x X' = \sum b X,$$

aus denen die neuen Relationen

$$X'' = (\sum a X)' = \sum \lambda X, \quad x X'' = x(\sum a X)' = \sum \lambda X, \quad x(x X')' = \sum \lambda X$$

oder die aequivalenten

$$X'' = \sum \lambda X, \quad x X'' = \sum \lambda X, \quad x^2 X'' = \sum \lambda X$$

hervorgehen. Eine analoge Ueberlegung zeigt, dass eine jede unter den Grössen

$$X''', \quad x X''', \quad x^2 X''', \quad x^3 X'''$$

wie überhaupt eine jede unter den Grössen

$$X^{(i)}, \quad x X^{(i)}, \quad x^2 X^{(i)}, \quad x^3 X^{(i)} \dots x^i X^{(i)}$$

die Form  $\sum \lambda X$  besitzt. Setzen wir daher insbesondere  $i = r$ , so erkennen wir die Existenz einer Relation

$$X^{(r)}(a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r) = 0,$$

deren constante Coefficienten  $a_k$  nicht sämmtlich verschwinden dürfen. Also ist  $X^{(r)} = 0$ , sodass wir

$$X_1 = 1, X_2 = x, X_3 = x^2 \dots X_r = x^{r-1}$$

setzen können. Unsere Gruppe besitzt daher sicher die Form

$$q \ xq \dots x^{r-1}q, p, xp + (cy + kx^r)q,$$

und dabei erkennen wir, wie bei einer früheren Gelegenheit, dass die Constante  $k$ , wenn  $c > \angle r$  ist, gleich Null gesetzt werden kann.

*Satz.* Eine jede Gruppe der Form  $X_k q, p + \eta_0 q, xp + \eta q$  ist daher reductibel auf die eine unter den beiden Formen

$$\begin{aligned} q \ xq \dots x^{r-1}q \ p \ xp + cyq \\ q \ xq \dots x^{r-1}q \ p \ xp + (ry + x^r)q \end{aligned}$$

4. Ist eine Gruppe der Form

$$X_1 q \dots X_r q \ yq \ p + \eta_0 q \ xp + \eta q$$

vorgelegt, so erkennt man zunächst wie in Nummer 2, dass  $\eta_0$  gleich Null gesetzt werden kann, und dass hiernach  $\eta$  gleich  $cxy$  gesetzt werden kann. Führen wir hiernach  $ye^{-cx}$  als neues  $y$  ein, so erhält unsere Gruppe die Form

$$X_1 q \dots X_r q \ p \ xp \ yq$$

und da die  $r+2$  erstgeschriebenen inf. Transformationen offenbar eine Untergruppe bilden, so liefern die Entwicklungen der vorangehenden Nummer den Satz:

*Satz.* Eine jede Gruppe der Form

$$X_1 q \dots X_r q, p + \eta_0 q, xp + \eta q$$

ist reductibel auf die Form

$$q \ xq \dots x^{r-1}q \ yq \ p \ xp.$$

Ich werde diejenigen synthetischen Betrachtungen, die mich ursprünglich die vorangehenden Resultate lieferten, kürzlich andeuten.

5. Ist eine Gruppe  $X_{1q} \dots X_{rq} p + \eta q$  vorgelegt, so bilden die  $X_{kq}$  eine invariante Untergruppe, deren  $\infty^{r-1}$  inf. Transformationen  $\Sigma \alpha_k X_{kq}$  eine homogene  $r$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit<sup>1)</sup>, die bei der vorgelegten  $(r+1)$ -gliedrigen Gruppe linear transformirt wird. Da indess die  $X_{kq}$  paarweise vertauschbar sind, so wird unsere homogene Mannigfaltigkeit nur durch eine einzige inf. Transformation nämlich  $p + \eta q$  in sich transformirt. Wenn indess auf eine Mannigfaltigkeit eine inf. lineare Transformation ausgeführt wird, so giebt es *unter den Punkten dieser Mannigfaltigkeit jedenfalls ein invariantes*. Die durch einen invarianten Punkt gehenden Geraden (d. h. einfach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten) bilden eine  $(r-1)$ -fach ausgedehnte homogene Mannigfaltigkeit, die ihrerseits durch unsere inf. Transformation linear transformirt wird. *Also geht durch jeden invarianten Punkt jedenfalls eine invariante Gerade*. Die durch eine solche invariante Gerade gehenden Ebenen (d. h. zweifach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeiten) bilden eine  $(r-2)$ -fach ausgedehnte homogene Mannigfaltigkeit, die selbst linear transformirt wird. *Daher geht durch jede invariante Gerade eine invariante Ebene u. s. w.*

Wir wenden jetzt diese allgemeinen Sätze auf die homogene Mannigfaltigkeit  $\Sigma \alpha_k X_{kq}$ , die durch die inf. Transformation  $p + \eta q$  linear transformirt wird, an. Es giebt, schliessen wir, jedenfalls ein invariantes Punkt, d. h. eine invariante inf. Transformation. Wir können annehmen, dass  $X_{1q}$  eine solche invariante Transformation ist, das also eine Rela-

<sup>1)</sup> Bei Untersuchungen über Gruppen ist es überhaupt nützlich die inf. Transformationen  $\Sigma \alpha_k B_k f$  als eine homogene Mannigfaltigkeit zu betrachten, die durch eine lineare Gruppe transformirt wird.

tion der Form

$$(X_1q, p + \eta q) = c_{11} X_1q$$

besteht.

Durch den invarianten Punkt  $X_1q$  geht, wissen wir, jedenfalls eine invariante Gerade. Wir denken uns die inf. Transformation  $X_2q$  derart gewählt, dass die  $\infty^1$  inf. Transformationen  $\alpha_1 X_1q + \alpha_2 X_2q$  eine solche invariante Gerade darstellen. Alsdann besteht eine Relation

$$(X_2q, p + \eta q) = c_{21} X_1q + c_{22} X_2q.$$

Durch die invariante Gerade  $\alpha_1 X_1q + \alpha_2 X_2q$  geht, wissen wir, jedenfalls eine invariante Ebene. Wählen wir die inf. Transformation  $X_3q$ , wie wir können, derart dass die  $\infty^2$  inf. Transformationen  $\alpha_1 X_1q + \alpha_2 X_2q + \alpha_3 X_3q$  eine solche invariante Ebene darstellen, so besteht eine Relation der Form

$$(X_3q, p + \eta q) = c_{31} X_1q + c_{32} X_2q + c_{33} X_3q.$$

In dem man in dieser Weise fortfährt, erkennt man überhaupt, dass die inf. Transformationen  $X_kq$  in solcher Weise gewählt werden können, dass für jedes  $k$  eine Relation der Form

$$(X_kq, p + \eta q) = c_{k1} X_1q + c_{k2} X_2q + \dots + c_{kk} X_kq$$

besteht. Und eben in dieser Weise war es, dass ich ursprünglich diese wichtigen Formeln fand.

6. Lass uns jetzt eine beliebige Gruppe der Form  $X_1q \dots X_rq p + \eta_0q, xp + \eta q$  betrachten. Alle inf. Transformationen  $X_kq$  bilden offenbar eine invariante Untergruppe. Daher bilden alle inf. Transformationen der Form  $\sum \alpha_k X_kq$  eine  $r$ -fach ausgedehnte homogene Mannigfaltigkeit, die durch eine jede unter den Transformationen  $p + \eta_0q, xp + \eta q$  linear transformirt wird. Die betreffenden linearen inf. Transformationen, die ich mit den Symbolen  $P$  und  $XP$  bezeichnen werde, bilde eine zweigliedrige lineare Gruppe, in der die

inf. Transformationen  $P$  offenbar eine *invariante Untergruppe* bestimmt.

Wenn aber eine Mannigfaltigkeit durch die beiden linearen inf. Transformationen  $P$  und  $XP$  (unter denen die erste invariant ist) transformirt wird, so giebt es, werden wir zeigen, jedenfalls ein absolut invarianter Punkt. Denn es giebt nach dem Vorangehenden ein oder mehrere Punkte, die gegenüber  $P$  invariant bleiben. Alle unter diesen Punkten, die *vereinzel*t liegen, bleiben offenbar bei jeder inf. Transformation der Gruppe  $P$ ,  $XP$  invariant. Bildet der Inbegriff von allen bei der inf. Transformation  $P$  invarianten Punkten eine *continuirliche* und zwar eine ebene Mannigfaltigkeit  $M$ , so bleibt diese Mannigfaltigkeit  $M$  bei der infinitesimalen Transformation  $XP$  invariant, während allerdings ihre Punkte linear transformirt werden. Dabei enthält  $M$  sicher ein bei  $XP$  invarianter Punkt, der dann selbstverständlicherweise gleichzeitig bei einer jeden inf. Transformation der Gruppe  $P$ ,  $XP$  ihre Lage behält. *Wird daher eine Mannigfaltigkeit durch eine zweigliedrige lineare Gruppe  $P$ ,  $XP$  (mit der invarianten inf. Transformation  $-P$ ) transformirt, so giebt es jedenfalls ein absolut invarianter Punkt.* Die durch einen solchen invarianten Punkt gehenden Geraden werden hiernach durch die zweigliedrige Gruppe  $P$ ,  $XP$  linear transformirt. *Also geht durch jeden bei der Gruppe  $P$ ,  $XP$  invarianten Punkt jedenfalls eine invariante Gerade.* Ebenfalls erkennen wir, dass jede invariante Gerade jedenfalls eine invariante Ebene enthält u. s. w.

Wenden wir diese allgemeine Sätze an auf die homogene Mannigfaltigkeit  $\Sigma \alpha_k X_k q$ , die durch die beiden inf. Transformationen  $p + \eta_0 q$ ,  $xp + \eta q$  linear transformirt wird, so erkennen wir wie in der vorangehenden Nummer, dass die  $X_k q$  immer in solcher Weise gewählt werden können, dass für jedes  $k$  Relationen der Form

$$\begin{aligned} (p + \eta_0 q, X_k q) &= c_{k1} X_1 q + c_{k2} X_2 q + \dots + c_{kk} X_k q \\ (xp + \eta q, X_k q) &= d_{k1} X_1 q + \dots + d_{kk} X_k q \end{aligned}$$

bestehen. Hiernach erkennt man durch Bildung der *Jacobi-schen* Identität,  $((p + \eta_0 q, xp + \eta q) X_k q) + \dots = 0$ , dass alle  $c_{kk}$  gleich Null sind.

Das vorangehende synthetische Rasonnement, das mir ursprünglich diese Formeln lieferte, habe ich in meinem Archive Bd. 3, und in Math. Ann. Bd. XVI in analytischer Form dargestellt. Doch ist jedenfalls in der erstcitirten Arbeit der synthetische Ursprung leicht zu erkennen.

## § 2.

### Ueber continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen.

Sind  $u_1 \dots u_r$  Funktionen von  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$ , die in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass jede Grösse  $(u_i u_k)$  sich als Funktion von den  $u$

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1 \dots u_r)$$

ausdrückt, so bilden alle  $u$  nach der von mir eingeführten Terminologie eine Gruppe. (Gesel. d. W. zu Christiania 1872 zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen; Math. Ann. Bd. VIII, p. 248) Die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(u_1 f) = 0 \dots (u_r f) = 0$$

bestimmen ein vollständiges System, dessen Lösungen  $v_1 \dots v_{2n-r}$ , wie ich in den citirten Arbeiten bemerkte, eine neue Gruppe: die Polargruppe der ursprünglich vorgelegten bilden. Ich bezeichnete zwei solche Gruppen als reciproke Gruppen. »Jede Gruppe besteht aus allen Funktionen, die mit allen Funktionen der zweiten Gruppe in Involution liegen.« Diese Bemerkung, die ich wortlautend aus meiner citirten Abhandlung<sup>1)</sup> in Math. Ann. Bd. VIII, p. 252 Theorem VI entnehme, ist *absolut identisch* mit dem folgenden Satze.

<sup>1)</sup> Sieh ebenfalls Verh. d. G. d. W. zu Christiania 1873.

*Bilden die linearen partiellen Differentialgleichungen*

$$A_1 f = 0, A_2 f = 0 \dots A_q f = 0$$

in den unabhängigen Variablen  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$  ein vollständiges System mit den Lösungen  $f_1 \dots f_{2n-q}$  und bestehen dabei Relationen der Form

$$(f_i f_k) = F_{ik}(f_1 \dots f_{2n-q}) \quad (i = 1 \dots 2n-q, k = 1 \dots 2n-q)$$

so ist unser vollständiges System reductibel auf die Form

$$(\varphi_1 f) = 0, (\varphi_2 f) = 0 \dots (\varphi_q f) = 0$$

und dabei bestehen Relationen der Form

$$(\varphi_i \varphi_k) = \Phi_{ik}(\varphi_1 \dots \varphi_q).$$

Dieser Satz wurde für den speciellen Fall  $q = 1$  von Cayley gegeben, ohne dass er bemerkte, dass derselbe nur ein speciellen Fall eines von mir aufgestellten allgemeinen Theorems bildet.

Durch meine Untersuchungen über continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen wurde ich dazu geführt das folgende noch viel allgemeinere Problem zu stellen

*Problem.* Find das allgemeinste System von linearen partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit einer unbekanntnen Funktion  $\Phi$  und  $2n$  unabhängigen Variablen  $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$ :

$$A_1 \Phi = 0, A_2 \Phi = 0 \dots A_r \Phi = 0$$

deren Lösungen in solcher gegenseitigen Beziehung stehen, dass zwei beliebige Lösungen  $\Phi_1, \Phi_2$  immer eine dritte Lösung  $(\Phi_1 \Phi_2)$  liefern.

Ist ein Gleichungssystem vorgelegt, das diese Forderung erfüllt, so liefert dasselbe jedesmal eine gewisse continuirliche Gruppe. Der Inbegriff von allen Lösungen  $\Phi$  liefert nämlich alle inf. Berührungstransformationen einer continuirlichen Gruppe.

Das aufgestellte Problem ist daher identisch mit dem

folgenden Probleme, mit dessen allgemeine Erledigung ich mich schon lange beschäftigt habe:

*Problem.* Find alle continuirliche Gruppen von Berührungstransformationen, welche die Form  $(\Phi f)$  besitzen.<sup>1)</sup>

Diese beiden aequivalenten Probleme theilen sich in zwei Unterprobleme, jenachdem die allgemeinste Lösung  $\Phi$  des Gleichungssystems  $A_k \Phi = 0$  arbiträre Funktionen oder nur arbiträre Constante enthält. Dementsprechend zerfallen alle continuirlichen Gruppen in zwei Categorien: unendliche und endliche continuirliche Gruppen.

Man kann die Beschränkung hinzufügen, dass sich unter den Gleichungen  $A_k f = 0$  die Relation

$$p_1 \frac{d\Phi}{dp_1} + p_2 \frac{d\Phi}{dp_2} + \dots + p_n \frac{d\Phi}{dp_n} = \Phi$$

finden soll. Das hierdurch definirte fundamentale Problem ist nur hinsichtlich der Form specieller als das vorangehende. Man kann sogar diese beiden Probleme in solcher Weise umformen, dass das erste Problem sich als ein specieller Fall des letzten darbietet.

### § 3.

#### Ueber den Multiplicator eines vollständigen Systems.

Nachdem ich in den Verh. d. G. d. W. zu Christiania für

<sup>1)</sup> Eine Berührungstransformation

$$x'_k = X_k(x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n), p'_k = P_k$$

wird nach mir definiert durch die Gleichungen  $(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0$  ( $P_i X_i) = A = \text{Const}$ . Im Allgemeinen kann man ohne Beschränkung  $A = 1$  setzen. Alsdann erhält eine inf. Berührungstransformation nach mir das einfache Symbol  $(\Phi f)$ . Ist dagegen  $A$  von 1 verschieden, so besitzt die betreffende inf. B-Transformation das Symbol  $[z + \Phi, f]$ . Betrachtet man homogene Berührungstransformationen, die bekanntlich als die allgemeinsten B-Transformation aufzufassen sind, so ist die Annahme  $A = 1$  gar keine Beschränkung. Die Theorie der Berührungstransformationen der Form  $[z + \Phi, f]$  subsumirt sich unter meine alte Theorie der homogenen Berührungstransformationen. (Gesel. d. W. Chr. a No. 9, 1884).



1874 den Begriff: Multiplikator eines vollständigen Systems eingeführt hatte, stellte ich in Math. Ann. Bd. XI u. A. den folgenden Satz auf

*Bilden  $q$  vorgelegte Gleichungen*

$$A_k f = X_{k1} \frac{df}{dx_1} + \dots + X_{kn} \frac{df}{dx_n} \quad (k = 1, 2 \dots q)$$

*ein Involutionssystem, so haben die linearen partiellen Differentialgleichungen*

$$A_k M + M \sum \frac{d X_{ki}}{d x_i} = 0$$

*die grösstmögliche Zahl gemeinsamer Lösungen. Jede solche Lösung ist ein gemeinsamer Jacobischer Multiplikator von allen Gleichungen  $A_k f = 0$ .*

Hierzu fügte Mayer imselben Bande von den Annalen den folgenden Satz:

*Der gemeinsame Jacobische Multiplikator von allen einzelnen Gleichungen des Involutionssystems  $A_k f = \sum X_{ki} \frac{df}{dx_i} = 0$  ist gleichzeitig ein Multiplikator des Involutionssystems  $A_k f = 0$ .*

Dieser Satz, der mir entgangen war, geht, wie ich Mayer bald nach der Publication seiner citirten Note bemerkte, fast unmittelbar aus meinen ursprünglichen Untersuchungen auf diesem Gebiete hervor.

Man füge nämlich zu den  $q$  Ausdrücken  $A_k f$   $n-q$  weitere solche Ausdrücke  $A_{q+1} f \dots A_n f$

$$A_{q+i} = \sum X_{q+i, j} \frac{df}{dx_j}$$

dass jedesmal  $(A_i A_k) = 0$  ist, während keine lineare Relation  $\sum \alpha_i A_i f = 0$  stattfindet. Setzt man sodann

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{q1} & X_{q2} & \dots & X_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & \dots & \dots & X_{n, n} \end{vmatrix}$$

so ist (Math. Ann. Bd. XI, p. 507)  $\Delta^1$  nicht allein ein Multiplikator des vorgelegten Involutionssystems, sondern gleichzeitig auch ein Jacobischer Multiplikator von einer jeden einzelnen Gleichung  $A_k f = 0$ .

Hiermit ist der betreffende Satz erwiesen.

### § 3.

#### Ein allgemeiner Satz über Transformationsgruppen, die keine invariante Untergruppe enthalten.

Bei den äusserst wichtigen Untersuchungen über die Zusammensetzung der Transformationsgruppen fragt es sich zunächst nach einfachen Methoden zur Bestimmung von allen invarianten Untergruppen, dabei vorausgesetzt, dass solche existiren.

Ich gebe in diesem Paragraphen einen bemerkenswerthen Satz, der häufig, wenn eine  $r$ -gliedrige Gruppe vorgelegt ist, die Bestimmung einer invarianten  $(r-1)$ -gliedrigen Untergruppe leistet. Gleichzeitig erkennt man, dass gewisse Funktionen von den Zusammensetzungskoeffizienten  $c_{iks}$  verschwinden müssen, wenn keine invariante  $(r-1)$ -gliedrige Untergruppe sich (durch die betreffende Methode) finden lässt.

Ich beschränke mich zunächst auf einfach transitive Gruppen von Punkttransformationen, und dehne hiernach meine Theorie auf beliebige Gruppen aus.

Seien also

$$B_k f = \xi_{k1} \frac{df}{dx_1} + \dots + \xi_{kn} \frac{df}{dx_n} \quad (k = 1 \dots n)$$

$n$  unabhängige inf. Transformationen, die paarweise in der Beziehung

$$(B_i B_k) = \sum c_{iks} B_s$$

stehen und dabei keine Relation der Form

$$\sum \varphi_k(x_1 \dots x_n) B_k f = 0$$

erfüllen. Ich setze

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \dots & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \dots & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

und bemerke dabei, dass diese Determinante von Null verschieden sein muss. Ich berechne den Ausdruck  $B_i \Delta$ . Es ist

$$B_i \Delta = \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_i \xi_{k1} & B_i \xi_{k2} & \dots & B_i \xi_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \dots & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

und durch Berücksichtigung von den Formeln

$$B_i \xi_{kq} = B_k \xi_{iq} + \sum_s c_{iks} \xi_{sq}$$

ergibt sich die wichtige Formel <sup>1)</sup>

$$B_i \Delta = \left( \frac{d \xi_{i1}}{dx_1} + \frac{d \xi_{i2}}{dx_2} + \dots + \frac{d \xi_{in}}{dx_n} + c_{i11} + c_{i22} + \dots + c_{inn} \right) \Delta$$

die wir folgendermassen schreiben

$$B_i (\log \Delta) - \sum_s \frac{d \xi_{is}}{dx_s} = \sum_k c_{ikk} \tag{L}$$

Nehme ich nun eine beliebige inf. Transformation unserer Gruppe:

$$Bf = \alpha_1 B_1 f + \alpha_2 B_2 f + \dots + \alpha_n B_n f$$

bilde die Formel

$$B(\log \Delta) - \sum_i \sum_s \alpha_i \frac{d \xi_{is}}{dx_s} = \sum_i \alpha_i \sum_k c_{ikk}$$

<sup>1)</sup> Sieh. Math. Ann. Bd. XVI, p. 510.

und setze

$$\sum \alpha_i \sum c_{ik} = 0$$

so erhalte ich, wenn diese Relation nicht zufälligerweise identisch besteht,  $\infty^{r-1}$  inf. Transformationen  $Bf$ , welche diese Forderung erfüllen. Die hierdurch bestimmten  $\infty^{r-1}$  inf. Transformationen bilden, behaupte ich, immer eine invariante  $(n-1)$  gliedrige Untergruppe.

Ich werde einen synthetischen Beweis dieses Satzes andeuten. Ich beschränke mich dabei auf den Fall  $n = 2$ . Die beiden entsprechenden inf. Transformationen seien

$$Af = X \frac{df}{dx} + Y \frac{df}{dy}, Bf = \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy}.$$

Die inf. Transformation  $Af$  ordnet jedem Punkte  $xy$  die inf. Strecke  $X \delta t, Y \delta t$  zu, und ebenfalls ordnet  $Bf$  dem Punkte  $xy$  die Strecke  $\xi \delta t, \eta \delta t$  zu. Diese beiden Strecken bestimmen ein infinitesimales Parallelogram. Jedem Punkte der Ebene ist somit ein inf. Parallelogram zugeordnet. Ich denke mich nun den Mass des Flächeninhalts derart gewählt, dass alle diese Parallelogramme einander gleich sind

Dies vorausgesetzt nehme ich statt  $Af$  und  $Bf$  zwei andere inf. Transformationen unserer Gruppe etwa

$$\alpha_1 Af + \beta_1 Bf, \alpha_2 Af + \beta_2 Bf$$

und construire wiederum für jeden Punkt  $xy$  das zugeordnete inf. Parallelogram. Dann werden wiederum alle diese Parallelogramme nach dem eingeführten Maasstabe einander gleich, und zwar gleich den früher construirten multiplicirt mit  $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$

Ich betrachte wiederum alle  $\infty^2$  inf. Parallelogramme, die  $Af$  und  $Bf$  entsprechen. Führe ich nun auf alle Punkte der Ebene eine gewisse inf. Transformation unserer Gruppe aus, so werden alle soeben besprochenen inf. Parallelogramme inf. verschoben, und gleichzeitig, der Formel (L) zufolge, nach constantem Verhältnisse geändert. Nehme ich insbesondere alle inf. Transformationen der Gruppe, die den Flä-

cheninhalt aller Parallelogramme invariant lassen, so ist es klar nicht allein, dass alle diese Transformationen eine Untergruppe bilden, sondern gleichzeitig auch, dass diese Untergruppe eine invariante sein muss.

Ganz in aehnlicher Weise r onniert man, wenn  $n$  einen beliebigen Werth besitzt.

*Bilden daher die inf. Transformationen*

$$B_k f = \xi_{k1} \frac{df}{dx_1} + \dots + \xi_{kn} \frac{df}{dx_n} \quad (k = 1 \ 2 \ \dots \ n)$$

*eine Gruppe*

$$(B_i B_k) = \sum c_{iks} B_s f$$

*und besteht dabei keine Relation  $\sum \beta_i B_i f = 0$ ; bezeichnet man ferner die Determinante der Grossen  $\xi_{ki}$  mit  $\Delta$ , so besteht die Formel*

$$B_k(\log \Delta) - \sum_s \frac{d \xi_{ks}}{dx_s} = \sum_s c_{kss}.$$

*Giebt es nun inf. Transformationen in der Gruppe, für welche die rechts stehende Constante von Null verschieden ist, so bildet der Inbegriff von allen in der Gruppe enthaltenen inf. Transformationen, für welche diese Constante verschwindet, eine invariante Untergruppe.*

Ist nun eine ganz beliebige Gruppe von Ber uhungstransformationen vorgelegt, so giebt es immer eine gleichzusammengesetzte einfach transitive Gruppe. Also bleibt der aufgestellte Satz auch gültig, wenn Relationen der Form  $\sum \beta_i B_i = 0$  bestehen.

Als Corollar ergibt sich der Satz.

*Enthält die  $r$ -gliedrige Gruppe  $B_k f$  keine invariante  $(r-1)$  gliedrige Untergruppe, so verschwinden alle Summen der Form  $\sum_k c_{ikk}$ .*

Es war übrigens durch synthetische Betrachtungen, die

mit den soeben entwickelten genau verwandt sind, dass ich ursprünglich auf den Begriff Multiplicator eines vollständigen Systems wie auch auf die von mir über diesen Begriff aufgestellten Sätze geführt wurde.

#### § 4.

##### Bestimmung von allen projectivischen Gruppen einer Ebene.

Nachdem ich in 1873–74 alle continuirliche Gruppen von Transformationen einer Ebene bestimmt hatte, gelang es mir sehr leicht insbesondere alle projectivische Gruppen der Ebene zu berechnen. Wenn ich diese an und für sich wichtige Theorie nicht früher in extenso publicirt habe, sondern nur ihre Durchführung als leicht bezeichnet habe (diese Zeitschrift Bd. 3, p. 165; 1878), so liegt es nur darin, dass ich fortwährend mit schwierigeren Untersuchungen beschäftigt war.

1. Bei der Bestimmung von allen projectivischen Gruppen einer Ebene können verschiedene Methoden angewandt werden, wenn gleich immer meine fundamentalen Formeln

$$(B_i B_k) = \sum c_{iks} B_s$$

als Grundlage benutzt werden müssen. Ich sehe jedenfalls nicht ein, wie man sie vermeiden kann. Diejenige Methode, die ich heute zunächst benutze, verlangt einige Rechnungen, die sich durch Zuhülfenahme von anderen Methoden reduciren lassen. Um Rechnungsfehler zu vermeiden ist es zweckmässig mehrere Methoden zu benutzen.

Ich nehme im Folgenden successiv alle von mir bestimmten Gruppen einer Ebene; stelle für jede derartige Gruppe die Frage, ob sie sich in eine projectivische Gruppe umwandeln lässt, und führe hiernach diese Umformung in allgemeinsten Weise durch. Wünsche ich z. B. zu entscheiden, ob die canonische Gruppe

$$q, e^x q, p, yq$$

sich in eine projectivische Gruppe transformiren lässt, so bestimme ich nach meinen früher entwickelten Regeln die allgemeinste bei der vorgelegten canonischen Gruppe invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & e^x & e^x \\ 0 & y & y' & y'' \end{vmatrix} = e^x(y'' - y') = 0$$

und frage hiernach, ob die gefundene Gleichung  $y'' - y' = 0$  sich in die Gleichung  $y'' = 0$ , die bei jeder projectivischen Gruppe invariant bleibt, transformiren lässt. In casu ist es leicht zu sehen, dass die Gleichung  $y'' - y' = 0$  sich auf die Form  $y'' = 0$  bringen lässt, und zwar z. B. durch Einführung von den neuen Variablen

$$x_1 = e^x, y_1 = y;$$

gleichzeitig erhält die vorgelegte Gruppe die *projectivische* Form

$$q_1, x_1 q_1, x_1 p_1, y_1 q_1$$

Wünscht man die vorgelegte Gruppe in *allgemeinster* Weise in eine projectivische Gruppe umzuformen, so muss man die allgemeinsten Variablen  $x_2 y_2$  aufsuchen, durch deren Einführung die Gleichung  $y'' - y' = 0$  die Form  $y_2'' = 0$  annimmt. Dabei wird den Zusammenhang zwischen  $x_2 y_2$  und  $x_1 y_1$  durch die allgemeine projectivische Transformation

$$x_2 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}{a x_1 + b y_1 + c}, y_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma}{a x_1 + b y_1 + c} \quad (P)$$

ausgedrückt, und daher geht die allgemeinste projectivische Gruppe, in die sich die vorgelegte Gruppe

$$q \ c \ q \ p \ y \ q$$

umwandeln lässt, aus der speciellen gefundenen Gruppe

$$q_1 \ x_1 \ q_1 \ x_1 p_1 \ y_1 \ q_1$$

durch die allgemeine projectivische Transformation (P) hervor.

In ganz aehnlicher Weise verfährt man nun immer, wenn man eine beliebige vorgelegte canonische Gruppe in allgemeinsten Weise in eine projectivische umwandeln wünscht. Man bestimmt zuerst die allgemeinste bei der vorgelegten canonischen Gruppe invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung  $y'' - F(xy y') = 0$ ; diese Bestimmung geht übrigens ohne weiter aus meiner Abhandlung Classification und Integration . . . I, diese Zeitschrift, Bd. 9, p. 187 hervor. Hiernach entscheidet man nach der in diesem Archive Bd. 9, p. . . . gegebenen Regeln, ob  $y'' = F(xy y')$  durch eine Punkttransformation die Form  $y'' = 0$  erhalten kann, was jedenfalls nur eintreten kann, wenn  $F$  eine ganze Funktion von  $y'$  von höchstens dritter Ordnung ist. Darnach bestimmt man, was keine Schwierigkeit darbietet, neue Variablen  $y_1 = Y(xy)$ ,  $x_1 = X(xy)$ , in denen  $y'' - F = 0$  die Form  $y'' = 0$  annimmt; und zwar genügt es nach dem Obenstehenden ein specielles Variabelsystem  $y_1 x_1$  zu finden, in denen  $y'' - F = 0$  die Form  $y_1'' = 0$  annimmt. In diesen neuen Variablen wird die vorgelegte canonische Gruppe eine projectivische Gruppe. Und nach dem Obenstehenden erhält man in dieser Weise alle projectivische Gruppen, in die sich die vorgelegte transformiren lässt.

2. Die Durchführung dieser Theorie wird bedeutend erleichtert durch den folgenden (bekannten) Satz.

*Es giebt keine projectivische Gruppe von vertauschbaren Transformationen einer Ebene, die mehr als zwei inf. Transformationen enthält.*

*Beweis.* Es ist zunächst bekannt, dass eine  $r$ -gliedrige Gruppe der Ebene mit mehr als zwei vertauschbaren inf. Transformationen  $B_1 f \dots B_r f$  die canonische Form  $X_k(x)q$  besitzen muss. Und diejenige Differentialgleichung zweiter Ordnung  $f(xy y' y'') = 0$ , die eine solche Gruppe gestattet, befriedigt die  $k$  Gleichungen



$$X_k \frac{df}{dy} + X_k' \frac{df}{dy'} + X_k'' \frac{df}{dy''} = 0,$$

und also ist  $r$  nicht grösser als 2.

Unter den unendlich vielen von mir bestimmten canoni-  
schen Transformationsgruppen einer Ebene ist es somit nur  
eine sehr begrenzte Anzahl, die wir discutiren brauchen.

Es giebt nach meinen früher citirten Arbeiten keine Gruppe  
von Punkttransformationen mit mehr als 8 inf. Transforma-  
tionen, die eine Differentialgleichung zweiter Ordnung  $y'' - F = 0$   
invariant lässt. Die einzigen Gruppen mit mehr als vier inf.  
Transformationen, die eine Gleichung  $y'' - F = 0$  invariant  
lassen, sind die fünf folgenden

$$p \ q \ xp \ xq \ yp \ yq \ x^2p + xyq, \ xyp + y^2q \quad (I)$$

$$p \ q \ xp \ xq \ yp \ yq \quad (II)$$

$$q \ xq \ yq \ p \ xp \ x^2p + xyq \quad (III)$$

$$p \ q \ xq \ yp \ xp - yq \quad (IV)$$

$$q \ xq \ p \ 2xp + yq \ x^2p + xyq \quad (V)$$

$$p \ q \ xq \ yq \ xp \quad (VI)$$

und zwar giebt es in jedem unter diesen fünf Fällen nur  
eine einzige solche invariante Gleichung nämlich  $y'' = 0$ . Die  
aufgestellten 5 Gruppen sind somit (wie bekannt) projectivi-  
sche Gruppen und sie gehen überdies durch keine transcen-  
dente (d. h. nicht projectivische) Transformation wiederum in  
projectivische Gruppen über<sup>1)</sup>

Um alle viergliedrige projectivische Gruppen zu finden  
müssen wir successiv die folgenden canonischen Gruppen nach  
den oben angegebenen Regeln discutiren.

<sup>1)</sup> Die Gruppe (I) ist bekanntlich *einfach*. Die Gruppen (II) und (III)  
sind dualistische Gruppen; dasselbe ist mit (IV) und (V) der Fall. Die  
Gruppe (VI) geht in sich durch eine dualistische Transformation über  
Die Gruppe II enthält nur zwei invariante Untergruppen nämlich (IV)  
und  $p \ q$ . Die Gruppe IV enthält die einzige inv. Untergruppe  $p \ q$ .  
Diese Sätze sind sehr specielle Fälle von Sätzen über allgemeine lineare  
Gruppen, die ich früher aufgestellt, und überdies längst verwerthet habe

- (A)  $q \ X(x)q \ yq \ p$   
 (B)  $q \ xq \ p \ xp + Kyq$   
 (C)  $q \ xq \ p \ xp + (2y + x^2)q$   
 (D)  $q \ yq \ p \ xp$   
 (E)  $yq \ p \ xp \ x^2p + xyq$   
 (F)  $q \ yq \ y^2q \ p$

unter denen die erste Form durch die Differentialgleichung

$$X' = a + mX$$

näher bestimmt wird. Daher ist die Gruppe (A) reductibel auf die eine unter den beiden Formen

- (A')  $q \ xq \ yq \ p$   
 (A'')  $q \ e^{xq} \ yq \ p$

und dabei ist es vortheilhaft die letzte Form durch die acquivaleute

- (A''')  $q \ xq \ yq \ xp$

zu ersetzen.

A'. Die Gruppe  $q \ xq \ yq \ p$  lässt eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' \end{vmatrix} = y'' = 0$$

invariant. Daher gibt es keine nicht-projectivische Transformation, welche die Gruppe A' wiederum in eine projectivische Gruppe umwandelt.

A''. Die Gruppe  $q \ xq \ yq \ xp$  gestattet nur eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung nämlich

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -y' & -2y'' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0 = y'',$$

und wird daher nur durch projectivische Transformationen wiederum in eine projectivische Gruppe übergeführt.

B). Wünschen wir alle zu der Gruppe (B) gehörigen invarianten Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu finden, so bilden wir zunächst die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & Ky & (K-1)y' & (K-2)y'' \end{vmatrix} = (K-2)y''$$

Ist  $K$  verschieden von 2, so lässt unsere Gruppe  $A$  nur die Gleichung  $y'' = 0$  invariant. Ist dagegen  $K = 2$ , so verschwindet  $\Delta$  identisch, und dann gestattet unsere Gruppe jede Gleichung der Form

$$y'' = 2a = \text{Const.}$$

Diese Gleichung erhält in den Variablen

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - ax^2 \tag{T}$$

die Form  $y_1'' = 0$ , und gleichzeitig liefert unsere Gruppe  $q \quad xq$   
 $p \quad xp + 2yq$  die neue Gruppe

$$q_1, \quad x_1 q_1, \quad p_1 - 2a x_1 q_1, \quad x_1 p_1 + 2y_1 q_1,$$

die mit der gegebenen identisch ist. Wir haben also hier eine projectivische Gruppe, die durch eine nicht-projectivische Transformation (T) in sich selbst übergeführt wird.

C). Die Gruppe (C) lässt, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 2y + x^2 & y' + 2x & z \end{vmatrix}$$

den Werth 2 besitzt, keine Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant, und kann daher nicht in eine projectivische Gruppe übergeführt werden.

D). Die Gruppe (D) lässt nur eine Gleichung zweiter Ordnung nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' \\ x & 0 & -y' & -2y'' \end{vmatrix} = 0 = y''$$

invariant und wird daher durch keine nicht-projectivische Gruppe wiederum in eine projectivische Gruppe übergeführt.

*E*). Die Gruppe (E) lässt nur eine Gleichung zweiter Ordnung nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' \\ x & 0 & -y' & -2y'' \\ x^2 & xy & y-xy' & -3xy'' \end{vmatrix} = 0 = y''$$

invariant und wird daher durch keine nicht-projectivische Transformation wiederum in eine projectivische Gruppe übergeführt.

*F*). Die Gruppe (F) lässt, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' \\ 0 & y^2 & 2yy' & 2yy'' + 2y'^2 \end{vmatrix}$$

den Werth  $2y'^3$  besitzt, keine Gleichung zweiter Ordnung invariant und ist daher nicht auf eine projectivische Form reductibel.

Es giebt also vier wesentlich verschiedene viergliedrige projectivische Gruppen nämlich

$$(VII) \quad q \ xq \ yq \ xp$$

$$(VIII) \quad q \ p \ yq \ xp$$

$$(IX) \quad q \ p \ xq \ m \ xp + n \ yq$$

$$(X) \quad yq, p, 2xp + yq \ x^2y + xyq$$

unter denen die dritte eine wesentliche Constante, nämlich das Verhältniss zwischen  $m$  und  $n$  enthält. Die Gruppen (VII)

und (VIII) gehen in einander durch eine dualistische Transformation über; dagegen kann eine jede unter den Gruppen (IX) und (X) in sich durch eine dualistische Transformation übergeführt werden; wobei doch zu bemerken ist, dass das Verhältniss  $m : n$  gleichzeitig geändert wird.

Eine jede unter unseren vier Gruppen ist zusammengesetzt, und enthält jedenfalls eine invariante dreigliedrige Untergruppe (was übrigens, wie ich schon in 1873 bemerkte mit einer jeden viergliedrigen Gruppe der Fall ist). Die Gruppe (VIII) enthält einfach unendlich viele invariante dreigliedrige Untergruppen, welche sämmtlich die Form

$$p \ q \ m\alpha p + n\gamma q$$

haben; drei invariante zweigliedrige Untergruppen

$$p, \ q; \ p, \ \alpha p; \ q, \ \gamma q$$

und zwei invariante eingliedrige Untergruppen:  $p$  und  $q$ .<sup>1)</sup>

Die Gruppe (X) enthält eine invariante dreigliedrige Untergruppe, und eine invariante eingliedrige Untergruppe. Denken wir uns die Gruppe auf die Form  $\alpha q, \ \alpha p - \gamma q, \ \gamma p, \ \alpha p + \gamma q$  gebracht, so liefert sie alle *homogene* und *lineare* Transformationen der Mannigfaltigkeit  $x \ y$ . Die drei inf. Transformationen  $\alpha q, \ \alpha p - \gamma q, \ \gamma p$  bilden die invariante dreigliedrige Untergruppe; die inf. Transformation  $\alpha p + \gamma q$  liefert die invariante eingliedrige Gruppe.<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Interpretirt man alle inf. Transformationen der Gruppe  $q, \ \gamma q, \ p, \ \alpha p$  als die Punkte des Raumes, so werden die drei invariante Gruppen  $p, \ \alpha p; \ q, \ \gamma q; \ pq$ , dargestellt durch zwei Gerade ( $g_1, g_2$ ), die eine dritte Gerade  $g$  schneiden. Alle  $\infty^2$  Gerade welche auf einmal  $g_1, g_2$  treffen, stellen zweigliedrige Untergruppen dar; alle Gerade, die durch den Punkt  $p$  oder den Punkt  $q$  gehen, stellen ebenfalls zweigliedrige Untergruppen dar etc. . . . Derartige Vorstellungen, die besonders wenn man eine Hülffigur zeichnet, äusserst bequem sind, benutzte ich im grossen Maasstabe bei meinen Untersuchungen in den Jahren 1873—77.

<sup>2)</sup> Interpretirt man alle inf. Transformationen unserer Gruppe als die Punkte des Raumes, so liefern alle  $\infty^1$  inf. Transformationen der Form  $\alpha q + \lambda(\alpha p - \gamma q) - \lambda^2 \gamma p$  mit dem Parameter  $\lambda$  einen invarianten

Um alle dreigliedrige projectivische Gruppen zu finden müssen wir die folgenden canonischen Gruppen nach den früher angegebenen Regeln discutiren:

- (a)  $q \quad xq \quad yq$   
 (b)  $X_1q, X_2q, p$   
 (c)  $q \quad yq \quad p$   
 (d)  $q \quad p \quad xp + Kyq$   
 (e)  $p, 2xp + yq, x^2p + xyq \equiv xq \quad xp - yq \quad yp$   
 (f)  $q, p, xp + (y + x)q$   
 (g)  $q, yq, y^2q$   
 (h)  $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q.$

a). Die canonische Gruppe (a) lässt keine andere Differentialgleichung zweiter Ordnung als  $y'' = 0$  invariant.

b). Die Gruppe (b) wird näher bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$X'_1 = aX_1, \quad X'_2 = bX_1 + cX_2$$

und ist daher reductibel auf die eine unter den vier Formen

$$q, \quad xq, \quad p; \quad q, \quad e^xq, \quad p; \quad e^xq, \quad xe^xq, \quad p; \quad e^xq, \quad e^{mx}q, \quad p$$

Die Gruppe  $q \quad xq \quad p$  lässt eine jede Gleichung der Form

$$y'' = 2a = \text{Const.}$$

invariant. Man nimmt daher die neuen Variabeln

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - ax^2$$

in denen unsere Gruppe wiederum die Form

$$q_1, \quad x_1q_1, \quad p_1 - 2ax_1 \quad q_1$$

erhält — Die mit der Gruppe  $q \quad e^xq \quad p$  aequivalente Gruppe  $q \quad xq \quad xp$  lässt jede Gleichung der Form

$$y'' = \frac{a}{x^2} \quad (a = \text{Const.})$$

---

Kegelschnitt; die inf. Transformation  $xp + yq$  liefert einen invarianten Punkt. Alle durch den genannten Punkt gehenden Tangentenebenen des Kegelschnitts, wie auch die Ebene dieser Curve liefern dreigliedrige Untergruppen etc.

invariant. Man nimmt die neuen Variablen

$$x_1 = x, y_1 = y + a \log x$$

in denen unsere Gruppe die Form

$$q_1, x_1 q_1, x_1 p_1 + a q_1$$

die mit der ursprünglichen äquivalent ist, annimmt. — Die Gruppe  $e^x q, x e^x q, p$  ist äquivalent mit der projectivischen Gruppe  $q, x q, p + y q$ , die eine jede Gleichung der Form  $y'' = a e^x$  invariant lässt. Wir nehmen daher die neuen Variablen

$$x_1 = x, y_1 = y - a e^x,$$

in denen unsere Gruppe wiederum die Form

$q_1, x_1 q_1, p_1 + y_1 q_1$  erhält. — Die Gruppe  $e^x q, e^{m x} q, p$  ist äquivalent mit der projectivischen Gruppe  $q, x q, x p + c y q$ , wo die Constante  $c$  von Null und 1 verschieden ist. Jede zugehörige invariante Gleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$y'' = L c (c - 1) x^{c-2}$$

und erhält in den neuen Variablen

$$x_1 = x, y_1 = y - L x^c$$

die mit der vorgelegten identische Form  $q_1, x_1 q_1, x_1 p_1 + c y_1 q_1$ . Die Form (b) liefert also die vier projectivischen Gruppen

$$q, x q, p; q, x q, x p; q, x q, p + y q; q, x q, x p + c y q$$

unter denen die letzte die wesentliche Constante  $c$  enthält, die von Null und 1 verschieden sein soll.

c). Jede bei der Gruppe  $q, y q, p$  invariante Gleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$y'' - a y_1 = 0$$

Diese Gleichung erhält in den Variablen

$$y_1 = y, x_1 = e^{a x}$$

die Form  $y'' = 0$ . Gleichzeitig erhält unsere Gruppe die neue ebenfalls projectivische Form  $q, y q, x p$ .

d). Die Gruppe  $q, p, x p + c y q$  lässt, wenn  $c = 1$  ist, keine

andere Gleichung zweiter Ordnung als eben  $y'' = 0$  invariant. Ist  $c \neq 1$ , so ist

$$y'' = a y' \frac{c-2}{c-1}$$

die allgemeine Form einer invarianten Gleichung 2. O. Soll eine solche Gleichung auf die Form  $y'' = 0$  reductibel sein, so muss (diese Zeitschrift, Bd. 9, p. . .) der Exponent  $\frac{c-2}{c-1}$  gleich Null, 1, 2 oder 3 sein. Die beiden Annahmen

$$\frac{c-2}{c-1} = 0, \quad c = 2 \quad \text{und} \quad \frac{c-2}{c-1} = 3 \quad c = \frac{1}{2}$$

sind offenbar aequivalent; ebenfalls sind die Annahmen

$$\frac{c-2}{c-1} = 2, \quad c = 0 \quad \text{und} \quad \frac{c-2}{c-1} = 1, \quad c = \infty$$

aequivalent. Ist aber  $c = \infty$ , so hat unsere Gruppe die früher discutierte Form  $q, p, yq$ . Wir können uns daher auf die Annahme  $c = 2$  beschränken. Die betreffende Gleichung  $y'' = 2a$  erhält in den Variablen

$$y_1 = y - ax^2, \quad x_1 = x$$

die Form  $y_1'' = 0$ ; und gleichzeitig nimmt die Gruppe  $q, p, xp + 2yq$  die neue Form  $q, p - 2a xq, xp + 2yq$ .

e). Die Gruppe  $p, 2xp + yq, x^2p + xyq$  lässt jede Gleichung der Form

$$y'' + Ay^{-3} = 0$$

invariant. Es lässt sich nachweisen, dass diese Gleichung wenn  $A \neq 0$  ist, nicht die Form  $y'' = 0$  erhalten kann. Zur Entscheidung dieser Frage bilden wir (Classif. und Integr. II, Bd. 9, p. Formel (3) und (4)) die Gleichungen

$$\frac{dc}{dx} = c^2 - Ay^{-3} C - 3Ay^{-4}, \quad \frac{dc}{dy} = -c C$$

$$\frac{dC}{dx} = c, \quad \frac{dC}{dy} = -C^2$$



und untersuchen, ob sie die Integrabilitäts-Bedingungen erfüllen. Dies ist, finden wir, nur wenn  $A$  verschwindet, der Fall. Also ist die Gleichung  $y'' + Ay^{-3} = 0$  nicht reductibel auf die Form  $y'' = 0$ . Und daher giebt es keine nicht-projectivische Transformation, die unsere Gruppe in eine projectivische Gruppe überführt.

f). Die Gruppe  $q, p, xp + (y + x)q$  gestattet die Gleichung  $y'' + ae^{-y'} = 0$ , die sich nur wenn  $a = 0$  ist, in  $y'' = 0$  transformiren lässt.

g). Die Gruppe  $q, yq, y^2q$  lässt gar keine Gleichung 2. O invariant und ist somit nicht auf eine projectivische Form reductibel.

h). Endlich die Gruppe  $p + q, xp + yq, x^2p + y^2q$  lässt jede Gleichung der Form:

$$(x-y)y''y'^{-\frac{3}{2}} + 2(y'^{\frac{1}{2}} + y'^{-\frac{1}{2}}) = A = \text{Const}$$

invariant. Diese Gleichung ist nicht reductibel auf die Form  $y'' = 0$ , wenn  $A$  von Null verschieden ist, indem  $y''$  alsdann keine ganze Funktion von  $y'$  ist. Dagegen muss diese Reduction möglich sein, wenn  $A$  gleich Null ist; denn es ist bekannt, dass unsere Gruppe durch eine Punkttransformation in die projectivische Gruppe eines Kegelschnitts

$$p + xq, xp + 2yq, (x^2 - y)p + xyq$$

übergeführt werden kann. Die vorangehenden Entwicklungen zeigen, dass wir keine andere projectivische Gruppe erhalten.

In ähnlicher Weise liesse sich nun alle zweigliedrige und eingliedrige projectivische Gruppen bestimmen. Ich finde es indess zweckmässiger diese ganze Theorie in neuer Weise zu behandeln.

---

Ich werde eine neue Bestimmungsweise von allen projectivischen Gruppen einer Ebene entwickeln. Dabei stütze ich mich allerdings fortwährend, wenn auch nicht in grosser Aus-

dehnung, auf meine allgemeine Transformationstheorie der Ebene.

Wenn eine Gruppe von Transformationen keine Curvenschaar  $\varphi(xy) = a$  invariant lässt, so ist sie nach mir reducibel auf eine unter den drei Formen

$$\begin{aligned} p, q, xq, xp, yq, yp, x^2p + xyq, xyp + y^2q, \\ p, q, xq, xp, yq, yp, \\ p, q, xq, xp - yq, yp. \end{aligned}$$

Dabei sehe ich wie früher ein, nicht allein, dass diese Gruppen projectivische Gruppen sind, sondern zugleich, dass sie durch keine nicht-projectivische Transformation in projectivische Gruppen übergeführt werden können.

Wenn eine  $r$ -gliedrige projectivische Gruppe eine Curvenschaar  $\varphi(xy) = a$  invariant lässt, so gestattet jede einzelne Curve  $\varphi = a_0$  jedenfalls  $\infty^{r-1}$  projectivische Transformationen und gehört somit, wenn  $r > 1$  ist, einer von *Klein* und mir untersuchten Curvencategorie.<sup>1)</sup> Ist  $r > 2$ , so ist jede Curve  $\varphi = a$  bekanntlich ein Kegelschnitt oder eine Gerade.

Es lässt sich nun beweisen, dass jede  $r$ -gliedrige Gruppe, die eine Curvenschaar  $\varphi = a$  invariant lässt, entweder einen Kegelschnitt oder eine Gerade oder einen Punkt invariant lassen muss.

Ist zunächst  $r = 1$ , so wissen wir, dass die betreffende inf. Transformation  $Bf$  sicher sowohl einen Punkt wie eine Gerade invariant lässt. Ist  $r = 2$ , und sind dabei die betreffenden inf. Transformationen  $B_1, B_2$  vertauschbar (d. h.  $(B_1 B_2) = 0$ ), so sind zwei Fälle zu berücksichtigen jenachdem  $B_1$  vereinzelte Punkte invariant lässt [in welchem Falle jeder einzelner unter diesen Punkten auch bei  $B_2$  invariant bleiben muss] oder nicht. Im letzten Falle bilden alle bei  $B_1$  invariante Punkte eine Gerade, die auch bei  $B_2$  invariant bleibt

<sup>1)</sup> Comptes rendus 1870.

[diese Gerade enthält übrigens jedenfalls ein bei  $B_2$  invari-  
anter Punkt]. Sind  $B_1$  und  $B_2$  nicht vertauschbar, so kön-  
nen wir  $(B_1 B_2) = B_1$  setzen. Alsdann lehrt ein ganz iden-  
tisches Rasonnement, dass die betreffende Gruppe sicher ei-  
nen Punkt (und zugleich eine Gerade) invariant lässt.

Ist  $r > 2$ , so sind, sahen wir, die früher besprochenen  
Curven  $\varphi = a$  entweder Kegelschnitte oder auch Gerade. Da-  
bei ist sicher, dass alle Curven  $\varphi$  eine Umbüllungsfigur be-  
stimmen, und es ist ferner sicher, dass diese Figur die Gruppe  
gestattet. Ist sie eine Curve, so muss sie ein Kegelschnitt  
oder eine Gerade sein; in allen anderen Fällen ist sie ein  
Punkt.

*Wenn daher eine projectivische Gruppe eine Curvenschaar  
 $\varphi(xy) = a$  invariant lässt, so besteht sie entweder aus allen  $\infty^3$   
projectivischen Transformationen eines Kegelschnitts oder auch  
lässt sie eine Gerade oder einen Punkt invariant.*

Da nun jede projectivische Gruppe, die einen Punkt in-  
variant lässt, durch eine dualistische Umformung eine projec-  
tivische Gruppe liefert, die eine Gerade invariant lässt, so  
ist unser Problem darauf zurückgeführt, *alle projectivische Grup-  
pen zu finden, die eine Gerade invariant lassen.* Anders aus-  
gesprochen, es genügt alle Untergruppen von der bekannten  
projectivischen Gruppe

$$p \ q \ xq \ xp \ yq \ yp,$$

welche die unendlich entfernte Gerade invariant lässt, zu be-  
stimmen.

Hierbei kann ich nun nach meinen früheren Untersu-  
chungen (Bd. 3, p. 408—410) alle derartige Untergruppen, die  
keinen unendlich entfernten Punkt invariant lassen, hinschrei-  
ben. Sie sind und zwar durch eine *projectivische* Umformung  
reductibel auf eine unter den Formen <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Eine ganz analoge Betrachtung giebt alle projectivische Gruppen eines  
 $n$ -fach ausgedehnten Raumes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , welche die unendlich entfernte

$$\begin{aligned}
 & xq \quad xp \quad yq \quad yp \quad p \quad q \\
 & xq \quad xp - yq \quad yp \quad p \quad q \\
 & \quad \quad xq \quad xp \quad yq \quad yp \\
 & \quad \quad xq \quad xp - yq \quad yp
 \end{aligned}$$

Alle weiteren Untergruppen sind nach einer zweckmässigen projectivischen Umformung Untergruppen der fünfgliedrigen Gruppe

$$(G_5) \quad q, xq, yq, p, xp$$

die wir daher eingehend discutiren werden.

Jede solche Gruppe lässt offenbar die Geradenschaar  $x = \text{Const.}$  invariant, und transformirt sie dabei höchstens zweigliedrig.

Wir stellen zunächst alle Untergruppen von  $G_5$ , die *jede einzelne* Gerade  $x = c$  invariant lassen, auf. — Wir bemerken dabei, dass  $G_5$  die Transformation

$$x_1 = ax + b, \quad y_1 = mx + ny + p$$

gestattet.

Eine zweigliedrige Untergruppe, welche  $q$  enthält, hat die Form

$$q, (ax + by)q$$

ist dabei  $b \neq 0$ , so kann  $a = 0$  gesetzt werden. Wir erhalten daher zunächst die beiden Formen

$$q, xq; \quad q, yq$$

Eine zweigliedrige Untergruppe, die  $q$  nicht enthält, ist reducibel auf die Form

$$(x + a)q \quad (y + b)q$$

und dabei können  $a$  und  $b$  gleich Null gesetzt werden. — Unterwerfen wir die eingliedrigen Gruppen eine ähnliche Discus-

Ebene invariant lassen und sie dabei durch ihre allgemeinste projectivische Gruppe transformiren. Man findet nur die vier Typen

<sup>1)</sup>  $x_1 p_k, p_k$ ; <sup>2)</sup>  $x_1 p_k (i \neq k) x_1 p_i - x_k p_k, p_k$ ; <sup>3)</sup>  $x_1 p_k$ ; <sup>4)</sup>  $x_1 p_k (i \neq k), x_1 p_i - x_k p_k$ .

sion, so sehen wir, dass alle Untergruppen von  $G_5$ , die jede Gerade  $x = C$  invariant lassen, auf die folgenden Formen reductibel sind:

$$q \ xq \ yq; \ q \ xq; \ q \ yq;$$

$$xq \ yq; \ q; \ xq; \ yq.$$

Wir suchen jetzt alle Untergruppen von  $G_5$ , bei denen die Geradenschaar  $x = C$  ein-gliedrig transformirt wird.

Eine viergliedrige Gruppe von der Form

$$q \ xq \ yq \ (mx + n)p$$

ist, jenachdem  $m$  verschwindet oder nicht, reductibel auf eine unter den beiden Formen

$$q \ xq \ yq \ xp; \ q \ xq \ yq \ p$$

Besitzt eine dreigliedrige Gruppe die Form

$$q, \ xq, \ (\alpha x + \beta)p + cyq$$

so kann entweder  $\alpha$  oder  $\beta$  gleich Null gesetzt werden; wir erhalten daher die drei Formen

$$q, \ xq, \ p; \ q, \ xq, \ p + yq; \ q, \ xq, \ xp + cyq$$

wo  $c$  eine wesentliche Constante bezeichnet.

Besitzt eine dreigliedrige Gruppe die Form  $q, \ yq$   $(\alpha x + \beta)p + \gamma xq$ , so zeigt die Formel

$$((\alpha x + \beta)p + \gamma xq, \ yq) = \gamma xq$$

dass  $\gamma = 0$  sein muss. Wir erhalten daher die beiden Formen

$$q \ yq \ p; \ q \ yq \ xp.$$

Besitzt eine dreigliedrige Gruppe die Form  $xq, \ yq, (\alpha x + \beta)p + \gamma q$ , so zeigen die Formeln

$$((\alpha x + \beta)p + \gamma q, \ yq) = \gamma q$$

$$((\alpha x + \beta)p + \gamma q, \ xq) = \alpha xq + \beta q$$

dass  $\gamma$  und  $\beta$  gleich Null sind. Unsere Gruppe ist daher die folgende

$$xq, \ yq, \ xp.$$

Hat eine zweigliedrige Gruppe die Form  $q, (\alpha x + \beta)p + (\gamma x + \delta y)q$ , so giebt es zwei Hauptformen

$$q, xp + (\delta y + \gamma x)q; \quad q, p + (\delta y + \gamma x)q$$

welche die fünf verschiedene Formen

$$q \quad xp + \delta yq; \quad q \quad xp + (y + x)q$$

$$q \quad p; \quad q \quad p + yq; \quad q \quad p + xq$$

liefern.

Hat eine zweigliedrige Gruppe die Form

$$xq, (\alpha x + \beta)p + (\gamma y + \varphi q)$$

so ist sicher  $\beta = 0$  und wir erhalten daher die beiden Formen

$$xq \quad xp + cyq; \quad xq \quad xp + q$$

Hat eine zweigliedrige Gruppe die Form  $yq, (\alpha x + \beta)p + (\gamma x + \delta)q$  so ist  $\gamma = \delta = 0$ , und dementsprechend finden wir die beiden Formen

$$yq \quad xp; \quad yq \quad p,$$

Endlich nehmen wir eine beliebige eingliedrige Gruppe

$$(\alpha x + \beta)p + (\gamma y + \delta x + \varphi)q$$

und reduciren sie auf eine unter den folgenden Formen:

$$xp + cyq, \quad xp + (y + x)q \quad xp + q, \quad xp$$

$$p + yq, \quad p + xq, \quad p.$$

Es steht jetzt zurück alle Untergruppen von  $G_5$  zu suchen, bei denen die Geraden  $x = \text{Const.}$  zweigliedrig transformirt werden. Dabei bemerken wir, dass jede solche  $r$ -gliedrige Gruppe eine invariante  $(r-1)$ -gliedrige Untergruppe enthält, bei der die Geraden  $x = \text{Const.}$  eingliedrig transformirt werden.

Wir treffen zuerst die allgemeine Gruppe

$$q \quad xq \quad yq \quad p \quad xp$$

ferner die viergliedrigen Gruppen

$$q \quad xq \quad p \quad xp + cyq$$

$$q \quad yq \quad p \quad xp$$

und die dreigliedrigen Gruppen

$$\begin{aligned}
 & q p \quad xp + cyq \\
 & q p \quad xp + (y + x)q \\
 & q p + xq \quad xp + 2yq \\
 & yq \quad p \quad xp
 \end{aligned}$$

und endlich die zweigliedrigen Gruppen

$$\begin{aligned}
 & p + xq, \quad xp + 2yq \\
 & p, \quad xp + cyq \\
 & p \quad xp + q
 \end{aligned}$$

Zu den gefundenen Gruppen sollen jetzt die dualistischen gefügt werden. Dabei ist indess zu bemerken, dass alle in  $G_5$  enthaltenen Untergruppen sich paarweise als reciproke zusammenordnen müssen, indem  $G_5$  durch eine dualistische Umformung in sich übergeführt werden kann.

Hiermit sind daher alle projectivischen und continuirlichen Gruppen einer Ebene gefunden. Wir stellen sie im folgenden Schema zusammen. Dabei bezeichnen wir mit dem Zeichen  $\infty$  dass zwei Gruppen in einander durch eine dualistische Umformung übergehen. Diejenigen Gruppen, die in sich selbst durch eine dualistische Umformung übergehen, sind in einer *doppelten* Rahmen eingefasst. Ich benutze den evidenten Satz, dass die Gleichungen

$$q = q_1, \quad p = -x_1 q_1, \quad x = \frac{p_1}{q_1}, \quad y = y_1 + x_1 \frac{p_1}{q_1}$$

eine dualistische Umformung bestimmen.<sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> Nachdem hiermit alle projectivischen und continuirlichen Gruppen einer Ebene bestimmt sind, liefert meine Abhandlung Classification und Integration ... II, Bd 9 *ohne weiter* alle bei einer beliebigen derartigen Gruppe invarianten Differentialgleichungen  $f(xyy' \dots y^{(n)}) = 0$ . Ich schalte hier die folgende Berichtigung ein. Linie 4 und 3 pag. 93 soll heissen »Die Gruppe II enthält nur *drei* invariante Untergruppen nämlich IV und  $p, q$  und  $p, q, xp + yq$ .«

$$p \ q \ xq \ xp \ yq \ yp \ x^2p + xyq \ xyp + y^2q$$

$$p \ q \ xq \\ xp \ yq \ yp$$

~

$$p_1 \ q_1 \ x_1q_1 \ x_1p_1 \\ y_1q_1 \ x_1^2p_1 + x_1y_1q_1$$

$$p \ q \ xq \ yq \ xp$$

$$p \ q \ xq \\ xp - yq \ yp$$

~

$$p_1 \ q_1 \ 2x_1p_1 + y_1q_1 \\ x_1q_1 \ x_1^2p_1 + x_1y_1q_1$$

$$p + xq, \ xp + 2yq, \ (x^2 - y) p + xyq$$

$$xq \ xp - yq \ yp$$

=

$$p \ 2xp + yq \ x^2p + xyq$$

$$q \ xq \ axp + cyq$$

~

$$q \ p \ (c - a) xp + cyq$$

$$q \ yq \ xp$$

=

$$xq \ yq \ xp$$

$$q \ xq \ p + yq$$

~

$$q \ p \ xp + (y - x) q$$

$$q \ x \ q \ p$$

$$q \ p + xq \ xp + 2yq$$



$$\boxed{q \ yq \ p \ xp} \sim \boxed{q_1 \ y_1 q_1 \ x_1 q_1 \ x_1 p_1}$$

$$\boxed{xp \ xp \ yq \ yp} = \boxed{p \ xp \ yq \ x^2 p + xyq}$$

$$\boxed{q \ xq \ p \ axp + cyq} \sim \boxed{q \ p \ xq \ (c - a) xp + cyq}$$

$$\boxed{q \ xq} \sim \boxed{q \ p}$$

$$\boxed{q \ p + xq}$$

$$\boxed{q \ xp}$$

$$\boxed{yq \ xp}$$

$$\boxed{p \ axp + cyq} \sim \boxed{xq \ (c - a) xp + cyq}$$

$$\boxed{xq \ xp + q} = \boxed{qp + yq} = \boxed{q \ xp + (y - x) q}$$

$$\boxed{p + xq \ xp + 2yq}$$

$$\boxed{xp + cyq}$$

$$\boxed{p + yq}$$

$$\boxed{p + xq}$$

$$\boxed{xp}$$

$$\boxed{q}$$

Nachdem wir im Vorgehenden alle projectivischen Gruppen der Ebene bestimmt haben, finden wir leicht alle Untergruppen der linearen homogenen Gruppe:

$$(G_9) \quad x_i p_k \quad (i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3)$$

Diese neungliedrige Gruppe hat ja nämlich eine *invariante* actgliedrige Untergruppe

$$(G_8) \quad \begin{array}{l} x_2 p_1, x_3 p_1, x_1 p_2, x_3 p_2, x_1 p_3, x_2 p_3, \\ x_1 p_1 - x_2 p_2, x_1 p_1 - x_3 p_3 \end{array}$$

die mit der projectivischen Gruppe der Ebene gleichzusammengesetzt ist. Als inf. Transformationen der Gruppe  $G_9$  wählt man am besten die acht in  $G_8$  enthaltenen zusammen mit

$$U = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Dabei bemerken wir, dass  $U$ , mit einer jeden in  $G_8$  enthaltenen inf. Transformation *vertauschbar* ist.

Suchen wir jetzt alle in  $G_9$  enthaltenen  $r$ -gliedrigen Untergruppen  $G_r$ , so bemerken wir, dass  $G_r$  eine  $(r-1)$ gliedrige Untergruppe umfasst, die in  $G_8$  enthalten ist, wenn nicht zufälligerweise  $G_r$  selbst eine Untergruppe von  $G_8$  ist. Man nimmt daher successiv alle in  $G_8$  enthaltenen  $(r-1)$ -gliedrigen Untergruppen und fügt darnach in allgemeinsten Weise eine weitere inf. Transformation hinzu.

Es ist übrigens zweckmässiger die Berechnung in etwas anderer Weise durchzuführen. Man bemerkt dann zunächst, dass alle in  $G_9$  enthaltenen Untergruppen, in denen  $U$  als selbständige inf. Transformation eingeht, ohne weiter hingeschrieben werden können. Um alle weiteren Untergruppen zu finden, kann man folgendermassen verfahren. Man nimmt eine beliebige in  $G_8$  enthaltene Untergruppe z. B. die dreigliedrige Gruppe

$$x_2 p_1, x_1 p_2, x_1 p_1 - x_2 p_2$$

bildet darnach die drei inf. Transformationen

$$\begin{aligned}
 & x_2 p_1 + a(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) \\
 & x_1 p_2 + b(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots) \\
 & x_1 p_1 - x_2 p_2 + c(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)
 \end{aligned}$$

und verlangt, dass sie eine dreigliedrige Gsuppe bestimmen sollen. Hierzu ist, wie man sogleich sieht, erforderlichlich dass die drei Constante  $a, b, c$  gleich Null sind.

Man nehme andererseits die vier gliedrige Gruppe

$$x_1 p_2, x_2 p_1, x_1 p_1 - x_2 p_2, x_1 p_1 + x_2 p_2 ;$$

indem man sie in entsprechender Weise behandelt, findet man die viergliedrige Gruppe

$$\begin{aligned}
 & x_1 p_2, x_2 p_1, x_1 p_1, -x_2 p_2 \\
 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + c(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)
 \end{aligned}$$

Indem man in dieser Weise verfährt, gelingt es *sogleich* alle in  $G_9$  enthaltenen Untergruppen aufzustellen. Ist überhaupt  $B_1 \dots B_\rho \dots B_r$  eine in  $G_8$  enthaltene Untergruppe, so bilden alle  $(B_i B_k)$  eine Gruppe etwa  $B_1 \dots B_\rho$ . Dann ist

$$B_1 \dots B_\rho, B_{\rho+1} + c_1 U, B_{\rho+2} + c_2 U \dots B_r + c_r U$$

die gesuchte in  $G_9$  enthaltene Untergruppe.

Nachdem in dieser Weise alle inf. Transformationen der betreffenden Gruppen gefunden sind, bestimmt man ohne Schwierigkeit nach meinen allgemeinen Regeln die zugehörigen endlichen Transformationen.

### § 6.

#### Ueber die Bestimmung von allen projectivischen Transformationsgruppen des Raumes.

In 1878 führte ich die Bestimmung von *allen* Gruppen von Punkttransformationen des Raumes durch, wie ich in Archiv for Math. Bd. 3 pag. 93 angegeben habe. Bis jetzt sind indess nur einzelne Bruchstücke (allerdings die schwierigen Theile) von dieser weitläufigen Theorie publicirt worden.

Ist eine beliebige Gruppe  $G_r$  von Punkttransformationen des Raumes vorgelegt, so kan man sie immer *in allgemeinsten Weise* in eine projectivische Gruppe des Raumes umformen, dabei vorausgesetzt, dass eine solche Umformung möglich ist. Man kann nämlich nach meiner allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten das allgemeinste bei  $G_r$  invariante Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= \varphi(\dots\dots\dots) \end{aligned} \right\} \text{(A.)}$$

aufstellen, und es darnach (in allgemeinsten Weise) in das Gleichungssystem

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = 0$$

überführen. In den neuen Variablen  $x_1, y_1, z_1$  ist dann die Gruppe  $G_r$  *projectivisch*.

Wenn man indess *alle* projectivischen Gruppen des Raumes aufzustellen wünscht, so ist es zweckmässiger eine andere Methode zu benutzen. Ich entwickle im Folgenden diese Methode, während ich ihre detaillirte Durchführung, die übrigens nur ganz elementare Rechnungen verlangt, zu einer anderen Gelegenheit verschiebe.

Man reducirt ziemlich leicht unser Problem auf die Bestimmung von allen projectivischen Gruppen, die entweder eine Gerade [oder einen Punkt (oder eine Ebene)] invariant lassen. Dies soll zunächst gezeigt werden. Dabei bemerke ich, dass ich schon früher alle projectivischen Gruppen bestimmt habe, die sich dadurch *definiren* lassen, dass sie eine Raumfigur (d. h. eine Fläche,<sup>1</sup> Curve oder Punkt) in sich überführen.

<sup>1</sup>) Sich Archiv for Math. Bd. VII, 1882, p. 190. Ich habe schon früher eine kleine Ungenauigkeit dieser Arbeit berichtigt. Die *Cayleysche Liniensfläche* 3 O. gestattet nämlich drei (und nicht nur zwei) inf. projectivische Transformationen.

Ich betrachte daher diese letzte Kategorie von projectivischen Gruppen als bekannt. Sehe ich dabei von dem Falle, dass die invariante Raumfigur eine Ebene, eine Gerade oder ein Punkt ist, weg, so kann ich überdies alle zugehörigen Untergruppen als bekannt betrachten. Denn die Bestimmung von allen projectivischen Gruppen, die eine Fläche zweiten Grades oder eine Curve dritter Ordnung in sich überführen, liegt gradezu in meinen alten Arbeiten aus 1874. Alle projectivische Gruppen, die eine ebene Curve invariant lassen, werden (durch Benutzung von bekannten Untersuchungen des Herrn *C. Jordan*) leicht aufgestellt; und diejenigen Gruppen, die eine *Cayleysche* Liniefäche 3. O. in sich überführen, können ebenfalls ohne weiter angegeben werden. Was endlich diejenigen Gruppen betrifft, die einen Kegel invariant lassen, so brauchen wir sie nicht hier näher zu betrachten, da sie einen Punkt, die betreffende Kegelspitze, invariant lassen.

Ich gehe zur allgemeinen Discussion von allen projectivischen Gruppen über. Sei also vorgelegt eine beliebige derartige Gruppe  $G_r$ . Halte ich einen Punkt  $p$  des Raumes fest, so werden die hindurchgehenden Richtungen  $dx dy dz$ , die eine zweifach ausgedehnte homogene Mannigfaltigkeit bilden, durch eine lineare Gruppe  $g_p$  dieser Mannigfaltigkeit transformirt. Hat dabei  $g_p$  acht (oder neun) Parameter, so ist  $G_r$  nach einem bekannten Satze von mir jedenfalls *aehnlich* entweder mit der allgemeinen projectivischen Gruppe  $G_{15}$  oder mit einer Untergruppe derselben mit 11 oder 12 Parameter, die eine Ebene invariant lässt. Und im vorliegenden Falle übersieht man leicht und zwar z. B. durch Betrachtung des (allgemeinsten) zugehörigen invarianten Gleichungssystems (A), dass diese Aehnlichkeit durch eine projectivische Transformation vermittelt wird.

Wir können also annehmen, dass  $g_p$  weniger als acht Parameter enthält. Folglich bilden die durch den festgehaltenen Punkt  $p$  gehenden Richtungen jedenfalls eine gewisse

invariante Figur und zwar entweder einen elementaren Kegel zweiten Grades, oder eine elementare Ebene, oder auch gibt es jedenfalls eine invariante Richtung. — Wir formuliren dieses bekannte Resultat folgendermassen:

*Nimmt man unter den Transformationen einer (projectivischen) Gruppe  $G_r$  alle, die einen arbiträren Punkt invariant lassen, so werden die hindurchgehenden Richtungen durch eine lineare Gruppe  $g_p$  transformirt. Hat  $g_p$  acht oder neun Parameter, so ist  $G_r$  durch] eine (projectivische) Umformung aehnlich entweder mit der allgemeinen projectivischen Gruppe des Raumes oder mit der pr. Gruppe, welche die unendlich entfernte Ebene invariant lässt oder endlich mit derjenigen pr. Gruppe, die alle Volumina nicht aendert. In allen übrigen Fällen lässt  $G_r$  entweder eine Gleichung*

$$\alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\lambda dx dy + 2\mu dx dz + 2\nu dy dz = 0 \quad (B)$$

*deren Coefficienten  $\alpha \dots \nu$  von  $x y z$  abhängen oder eine lineare Gleichung*

$$X(xy) dx + Ydx + Zdz = 0$$

*oder endlich ein simultanes System*

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

*invariant.*

Lass uns zunächst alle pr. Gruppen betrachten, die eine Gleichung (B) vom zweiten Grade in  $dx dy dz$  invariant lassen. Dabei können wir annehmen, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \lambda & \mu \\ \lambda & \beta & \nu \\ \mu & \nu & \gamma \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet, indem sonst eine lineare *invariante* Gleichung  $Xdx + Ydy + Zdz = 0$  existirte. Die Gleichung  $\Delta = 0$  bestimmt somit *eine bei der vorgelegten Gruppe invariante Fläche*, den Ort nämlich aller Punkte, deren zuge-

ordneter elementarer Kegel zweiten Grades zerfällt. Dies bleibt noch richtig, wenn  $\Delta$  gleich einer nicht verschwindenden Constanten ist, indem die unendlich entfernte Ebene in diesem Falle bei der Gruppe invariant bleibt.

Lass uns sodann eine beliebige pr. Gruppe betrachten, die eine Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

invariant lässt. Ist diese Gleichung nicht integrabel, so giebt meine Bestimmung aller Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene die Berechnung von der betreffenden Gruppe. Existirt in der That, wie wir annehmen können, kein invariantes Gleichungssystem

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{Y_1} = \frac{dz}{Z_1}, \tag{C}$$

so enthält unsere Gruppe nach den citirten Untersuchungen zehn Parameter und ist dabei aehnlich mit der allgemeinen projectivischen Gruppe eines linearen Liniencomplexes. Dass diese Aehnlichkeit durch eine projectivische Transformation vermittelt wird, lässt sich daraus schliessen, dass die Gleichungen  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$  das einzige bei der projectivischen Gruppe eines linearen Liniencomplexes invariante Gleichungssystem der Form (A) bestimmen.

Bleibt eine integrable Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0 = \rho d\varphi$$

invariant bei einer projectivische Gruppe, die kein simultanes System

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{Y_1} = \frac{dz}{Z_1} \tag{C}$$

in sich überführt, so muss eine jede Fläche der invarianten Schaar  $\varphi = \text{Const.}$  eine Ebene sein. Denn sonst hätten diese  $\infty^1$  Flächen  $\infty^2$  Haupttangencurven, die ein invari-

antes simultanes System (C) gäben, was ausgeschlossen ist. Wenn aber eine Gruppe eine Schaar von  $\infty^1$  Ebenen invariant lässt so führt sie die von diesen Ebenen umhüllte Figur in sich über. Diese Umhüllungsfigur ist übrigens nach den vorangehenden Voraussetzungen sicher eine Gerade; wäre sie nämlich eine Developpable, so existirte eine invariante Schaar von  $\infty^2$  Geraden.

Lässt eine pr. Gruppe  $G_r$  eine Schaar von  $\infty^2$  Curven invariant und ist dabei, wie wir annehmen werden,  $r > 3$ , so gestattet jede solche Curve sicher zwei inf. projectivische Transformationen und ist daher nach *Kleins* und meinen alten Untersuchungen eine Curve dritter Ordnung, eine ebene Curve oder eine Gerade. Führt eine pr. Gruppe eine Schaar von  $\infty^2$  Geraden in sich über, so bleibt offenbar auch die zugehörige Brennfigur invariant. Existirt andererseits eine invariante Schaar von  $\infty^2$  ebenen Curven, so umhüllen die Ebenen dieser Curven eine invariante Raumfigur. Existirt endlich eine invariante Schaar von  $\infty^2$  Curven dritter Ordnung, so werden wir zunächst annehmen, dass diese Curven eine *invariante* Flächenschaar  $\varphi = \text{Const.}$  erzeugen. Jede Fläche  $\varphi = a$  gestattet dann  $r - 1$ , also jedenfalls drei inf. pr. Transformationen, und ist somit sicher eine Regelfläche; in diesem Falle existirte somit eine invariante Schaar von  $\infty^2$  Geraden und gleichzeitig eine invariante Brennfigur. Es bleibt also nur übrig die Annahme, dass die  $\infty^2$  Curven 3. O. keine invariante Flächenschaar  $\varphi = a$  liefern<sup>1)</sup>. Da nun  $r$  nicht grösser als 5 sein kann, indem eine Curve 3. O. nicht mehr als drei inf. pr. Transformationen gestattet, so lässt sich schließen, dass unsere Gruppe mit der Gruppe

$$p, q, xq, xp - yq, yp$$

gleichzusammengesetzt ist und somit eine invariante zweigliedrige Untergruppe enthält. Auch in diesem Falle existirte somit eine invariante Raumfigur.

<sup>1)</sup> Diese Annahme tritt übrigens nie ein.



Enthält eine Gruppe weniger als 4 unabhängige inf. Transformationen, so erkennt man ohne weiteres die Existenz einer invarianten Raumfigur.

Wir erhalten somit den allgemeinen Satz:

*Eine Untergruppe der allgemeinen projectivischen Gruppe des Raumes lässt entweder einen linearen Liniencomplex oder eine Fläche oder eine Curve oder einen Punkt invariant.<sup>1)</sup>*

Da wir nun die Bestimmung von allen pr. Gruppen, bei denen eine *krumme* nicht developpable Fläche oder eine krumme Curve invariant bleibt, als geleistet betrachten können, so bleibt uns nur übrig alle pr. Gruppen zu finden, bei denen eine Ebene oder eine Gerade oder ein Punkt seine Lage behält. Es ist dabei unnothwendig den letzten Fall, dass ein Punkt invariant bleibt, zu discutiren, indem alle derartigen Gruppen durch eine dualistische Umformung Gruppen, die eine Ebene invariant lassen, liefern.

Die allgemeinste pr. Gruppe, die eine Ebene und zwar die unendlich entfernte Ebene invariant lässt, besitzt die Form

$$yp, zp, xq, zq, xr, yr, xp - yq, xp - zr \quad (T)$$

$$p, q, r, xp + yq + zr. \quad (G)$$

Wir bemerken dabei, dass die acht inf. Transformationen (T) eine Untergruppe erzeugen, welche die allgemeinste projectivische Transformationsgruppe der Punkte der unendlich entfernten Ebene liefert. Wir fügen hinzu, dass die vier inf. Transformationen (G) gar nicht die Punkte dieser Ebene transformiren. Wir erhalten daher eine naturgemässe Classification von allen unseren Gruppen, indem wir jedesmal

<sup>1)</sup> Wenn eine Gruppe  $G_r$  von Punkttransformationen des Raumes  $x_1, \dots, x_n$  keine Untergruppe mit mehr als  $r-n$  Parametern enthält, so giebt es keine bei der Gruppe in sich transformirte Raumfigur, die durch  $k$  Gleichungen.

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$$

definirt wird. Dieser Satz lässt sich selbstverständlich umkehren.

diejenigen zusammenfassen, welche die unendlich entfernte Ebene in identischer Weise transformiren.

Alle Untergruppen der Gruppen (T) sind im vorigen Paragraphen aufgestellt. Wir nehmen successiv alle diese Untergruppen, zunächst z. B. die Gruppe

$$(V) \quad yp, xq, xr, yr, xp - yq, xp - zr$$

und suchen sodann alle Gruppen, welche die unendlich entfernte Ebene invariant lassen und sie dabei in identisch derselben Weise wie die Gruppe (V) transformiren. Bezeichnen wir die 6 inf. Transformationen der Gruppe (V) mit dem Symbole  $V_k$ , so ist klar, dass die gesuchten Gruppen sechs inf. Transformationen von der Form

$$V_k + \alpha_k p + \beta_k q + \gamma_k r + \delta_k (xp + yq + zr).$$

enthalten. Lass mich zunächst annehmen, dass gar keine inf. Transformation die Form

$$\varphi (xp + yq + zr) + \lambda p + \mu q + \nu r$$

besitzt. Setze ich dann

$$S_1 = yp + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r + \delta_1 (xp + yq + zr)$$

$$S_2 = xq + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r + \delta_2 ( \dots \dots \dots )$$

$$S_3 = xr + \alpha_3 p + \dots \dots \dots + \delta_3 ( \dots \dots \dots )$$

$$S_4 = yr + \alpha_4 p + \dots \dots \dots + \delta_4 ( \dots \dots \dots )$$

$$S_5 = xp - yq + \dots \dots \dots + \delta_5 ( \dots \dots \dots )$$

$$S_6 = xp - zr + \dots \dots \dots + \delta_6 ( \dots \dots \dots )$$

so erkenne ich zunächst durch successive Bildung der Ausdrücke:

$$(S_1 S_2) \quad (S_1 S_5) \quad (S_2 S_5) \quad (S_3 S_5) \quad (S_4 S_5)$$

dass

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0,$$

während  $\delta_6$  von Null verschieden sein kann. Durch Bildung von den Ausdrücken  $(S_i S_k)$  ergibt sich, dass die  $S_k$  die Form

$$(y + \beta)p, (x + \alpha)q, (x + \alpha)r, (y + \beta)r \\ (x + \alpha)p - (y + \beta)q, (x + \alpha)p + \delta((x + \alpha)p + (y + \beta)q) + \\ \gamma r + (\delta - 1)zr$$

besitzen, und folglich auf die einfachere Form

$$yp, xq, xr, yr, xp - yq \\ xp - zr + \delta(xp + yq + zr) + \gamma r$$

reductibel sind. Ist dabei  $\delta = 1$ , so kann man  $\gamma = 1$  oder  $\gamma = 0$ , und in allen übrigen Fällen  $\gamma = 0$  setzen.

Giebt es keine inf. Transformation

$$xp + yq + zr + \lambda p + \mu q + \nu r,$$

wohl aber eine einzige von der Form  $\lambda p + \mu q + \nu r$ , so müssen  $\lambda$  und  $\mu$  gleich Null sein. Wäre in der That z. B. die Constante  $\lambda$  von Null verschieden, erhielte man durch Bildung des Ausdrucks

$$(p + \mu q + \nu r, xr + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r)$$

die inf. Transformation  $r$ , so dass wir auf Contradictio geführt würden. Unsere inf. Transformationen haben somit die Form

$$r, S_1 = yp + \alpha_1 p + \beta_1 q \\ S_2 = xq + \alpha_2 p + \beta_2 q \\ S_3 = xr + \alpha_3 p + \beta_3 q \\ S_4 = yr + \alpha_4 p + \beta_4 q \\ S_5 = xp - yq + \alpha_5 p + \beta_5 q \\ S_6 = xp - zr + \alpha_6 p + \beta_6 q + \delta(xp + yq + zr)$$

und dabei erkennt man ganz wie im vorigen Falle, dass sie auf die Form

$$r, xq, yp, xr + \beta q, yr - \beta p, xp - yq \\ xp - zr - 2(xp + yq + zr)$$

oder auf die Form

$$r, xq, xp - yq, yp, xr, yr \\ xp - zr + \delta(xp + yq + zr)$$

reductibel sind.

Enthält unsere Gruppe keine inf. Transformation von der Form

$$xp + yq + zr + \lambda p + \mu q + \nu r$$

dagegen mehr als eine von der Form  $\lambda p + \mu q + \nu r$ , so findet sich unter ihnen sicher  $r$ , und jedenfalls eine von der Form  $\lambda p + \mu q$ . Bildet man daher die beiden Ausdrücke

$$(\lambda p + \mu q, xq + \alpha_1 p + \beta_1 q)$$

$$(\lambda p + \mu q, yp + \alpha_2 p + \beta_2 q)$$

so erkennt man, dass sowohl  $p$  wie  $q$  auftreten müssen. Unsere Gruppe hat daher die Form

$$\begin{array}{ccccccc} p & q & r & xq & yp & xr & yr \\ & & & xp - zr + \delta(xp + yq + zr). \end{array}$$

Jetzt nehmen wir an, dass eine inf. Transformation

$$(A) \quad xp + yq + zr + \lambda p + \mu q + \nu r$$

dagegen keine von der Form  $\lambda p + \mu q + \nu r$  auftritt. In diesem Falle ist unsere Gruppe reductibel auf die Form

$$xq, yp, xr, yr, xp, yq, zr.$$

Existirt wiederum eine inf. Transformation (A) und über dies eine und nur eine von der Form  $\lambda p + \mu q + \nu r$ , so muss  $\lambda = \mu = 0$  sein. Dabei ist

$$r \quad xr \quad yr \quad xp \quad xq, yq, yp \quad zr$$

die canonische Form unserer Gruppe.

Giebt es endlich eine inf. Transformation (A) und mehr als eine von der Form  $\lambda p + \mu q + \nu r$ , so ist

$$p \quad q \quad r \quad xr \quad yr \quad xq \quad yp \quad xp \quad yq \quad zr$$

die canonische Form unserer Gruppe.

Durch ganz aehnliche Betrachtungen findet man fast ohne Rechnung alle projectivischen Gruppen des Raumes, die eine Ebene, dagegen keine in dieser Ebene gelegene Gerade oder Kegelschnitt invariant lassen. Ich beschränke mich darauf alle diese Gruppen in einem Schema zusammenzustellen.

I. Gruppen, bei denen die unendlich entfernte Ebene in allgemeinsten Weise transformirt wird.

$$p \ q \ r \ xq \ xr \ yp \ yr \ zp \ zq \ xp \ yq \ zr$$

$$p \ q \ r \ xq \ xr \ yp \ yr \ zp \ zq \ xp - yq \ xp - zr$$

$$xq \ xr \ yp \ yr \ zp \ zq \ xp \ yq \ zr$$

$$xq \ xr \ yp \ yr \ zp \ zq \ xp - yq \ xp - zr$$

II. Gruppen, bei denen die Punkte der unendlich entfernten Ebene fünfgliedrig transformirt werden.

$$xr \ yr \ xq \ yp \ xp - yq$$

$$xr \ yr \ xq \ yp \ xp - yq \ xp + yq + zr$$

$$r \ xr + \beta q \ yr - \beta p \ xq \ xp - yq \ yp$$

$$r \ xr \ yr \ xq \ xp - yq \ yp \ xp + yq + zr$$

$$r \ p \ q \ xr \ yr \ xq \ xp - yq \ yp$$

$$r \ p \ q \ xr \ yr \ xq \ xp - yq \ yp \ xp + yq + zr$$

III. Gruppen, bei denen die Punkte der unendlich entfernten Ebene sehsgliedrig transformirt werden.

$$xr \ yr \ xq \ yp \ xp - yq \ xp - zr + \delta(xp + yq + zr)$$

$$xr \ yr \ xq \ yp \ xp - yq \ 2xp + yq + r$$

$$r \ xr + q \ yr - p \ xq \ xp - yq \ yp \ xp + 2yq + 3zr$$

$$r \ xr \ yr \ xq \ xp - yq \ yp \ xp - zr + \delta(xp + yq + zr)$$

$$p \ q \ r \ xr \ yr \ xq \ xp - yq \ yp \ xp - zr + \delta(xp + yq + zr)$$

$$xr \ yr \ xq \ yp \ xp - yq \ xp - zr \ xp + yq + zr$$

$$r, \ xr, \ yr, \ xq, \ yp, \ xp \ yq, \ zr$$

$$r \ p \ q \ xr \ yr \ xq \ yp \ xp \ yq \ zr$$

Unter diesen Gruppen giebt es mehrere (die man leicht ausschliessen kann) die eine im endlichen Raume gelegene Gerade invariant lassen.

Es steht jetzt nur noch zurück, alle Gruppen des Raumes, bei denen eine Gerade ihre Lage behält, anzustellen.

Alle diese Gruppen sind Untergruppen von der elfgliedrigen Gruppe

$$p, q, zp, zq \quad (\text{T})$$

$$xp \quad xp - yq \quad yq \quad (\text{U})$$

$$r, xp + yq + 2zr, xzp + yzq + z^2r \quad (\text{V})$$

$$zr \quad (\text{W})$$

Man sieht, dass die 10 inf. Transformationen T, U, V eine invariante Untergruppe mit den invarianten Untergruppen (T U) (T V) und (T) bilden. Diese elfgliedrige Gruppe ist (sich Math. Ann. Bd. V, p. 186) gleichzusammengesetzt mit der Gruppe von allen Aehnlichkeitstransformationen eines vierfach ausgedehnten Raumes. Die vier inf. Transformationen (T) sind Translationen, die drei inf. Transformationen (U) wie auch die drei inf. Transformationen V bilden eine Gruppe von Rotationen um einen festen Punkt, und diese beiden letzten Gruppen liegen in Involution. Endlich die Transformation zr ist eine Aehnlichkeitstransformation.

*Das Problem alle projectivischen Gruppen des Raumes zu bestimmen ist im Vorangehenden reducirt auf die Affindung aller pr. Gruppen, die eine Gerade invariant lassen, oder was auf dasselbe hinauskommt, auf die Bestimmung aller Gruppen von Aehnlichkeitstransformationen eines vierfach ausgedehnten Raumes.*

Bei einer späteren Gelegenheit werde ich dieses reducirte Problem erledigen. Gleichzeitig finde ich alle Untergruppen der linearen Gruppe

$$x_i \quad p_k \quad (i = 1 \dots 4 \quad k = 1 \dots 4)$$

<sup>1)</sup> Nach einer früheren Bemerkung von mir (Math. Ann. Bd. V, p. 186) ist die projectivische Gruppe des gewöhnlichen Raumes gleichzusammengesetzt, ja wenn man will sogar aehnlich mit der Gruppe von allen conformen Punkttransformationen eines vierfach ausgedehnten Raumes.

Unter denjenigen pr. Gruppen, die eine Gerade invariant lassen, verdienen diejenigen eine besondere Aufmerksamkeit, bei denen keine Ebene und auch kein Punkt ihre Lage behält. Hierher gehört die *achtgliedrige Gruppe*<sup>\*)</sup>, die eine spezielle lineare Congruenz invariant lässt, die siebengliedrige Gruppe die einen linearen Liniencomplex und eine Gerade desselben invariant lassen, die sechsgliedrige Gruppe, die  $\infty^1$  einander berührende linearen Complexe sämtlich in sich überführen; anderseits die siebengliedrige Gruppe die eine allgemeine lineare Congruenz in sich überführen, und eine sechsgliedrige Untergruppe.

### § 7.

#### Zur allgemeinen Transformationstheorie des Raumes.

In den Jahren 1876—77 bestimmte ich durch äusserst weitläufige Rechnungen alle Gruppen von Punkttransformationen des Raumes, wie ich im ersten und dritten Bande von dieser Zeitschrift angekündigt habe. Später (1878) gelang es mir diese ganze Berechnung wesentlich zu vereinfachen. Ich fand nämlich, dass es möglich war das betreffende Problem a priori, sozusagen ohne Rechnung, in eine grosse Anzahl einfachere Probleme zu zerlegen, nämlich in der Weise dass man alle möglichen Gruppen von Punkttransformationen des Raumes a priori in eine Reihe wohlbegrenzte Categorien verteilen könnte. In diesem Paragraphen werde ich dieses

---

<sup>1)</sup> Die achtgliedrige Gruppe des Textes ist durch eine Berührungstransformation ähnlich mit der Gruppe, die aus allen Aehnlichkeitstransformationen und Dilatationen des gewöhnlichen Raumes besteht; die beiden folgenden Gruppen entsprechende allen Aehnlichkeitstransformationen oder allen Bewegungen des Raumes. Die beiden weiteren Gruppen des Textes sind ähnlich mit den Gruppen aller Aehnlichkeitstransformationen oder Bewegungen eines vierfach ausgedehnten Raumes, bei denen ein endlicher Punkt dieses Raumes ihre Lage behält.



Classificationsprincip kürzlich begründen und gleichzeitig *einige* unter meine Categorien erschöpfend discutiren, indem ich ihre Gruppen vollständig bestimme.

Ist eine Gruppe  $G_r$  von Punkttransformationen des Raumes vorgelegt, so können wir die allgemeinste Untergruppe betrachten, deren Transformationen einen Punkt  $x y z$  allgemeiner Lage invariant lassen. Die durch diesen Punkt hindurchgehenden Richtungen  $dx dy dz$  werden durch diese Untergruppe unter einander vertauscht, und zwar werden sie, können wir sagen, durch eine *lineare* Gruppe  $g_\rho$  transformirt. Ist die Zahl  $\rho$  gleich 8 oder 9, so ist die Zahl  $\nu$  nach einem alten Satze von mir gleich 15, 12 oder 11 und dabei ist  $G_r$  ähnlich entweder mit der allgemeinen projectivischen Gruppe des Raumes oder mit zwei bekannten projectivischen Gruppen.

Dieser Satz, der sich auf  $n$  Dimensionen ausdehnt, wird bewiesen durch eine direkte Verallgemeinerung von meinen in Math. Ann. Bd. XVI, gegebenen Entwicklungen.

Ist die früher besprochene Zahl  $\rho$  kleiner als acht, so lässt die lineare Gruppe  $g_\rho$  sicher eine gewisse Figur invariant, und zwar entweder eine bestimmte Richtung  $dx dy dz$  oder auch den Inbegriff von einfach unendlich vielen derartigen Richtungen, die eine elementare Ebene oder einen elementaren Kegel zweiten Grades bilden. Dementsprechend vertheilen sich alle Gruppen  $G_r$  in mehrere getrennte Classen, die wir successiv besprechen werden.

Lässt die lineare Gruppe  $g_\rho$  einen irreductiblen elementaren Kegel zweiten Grades invariant, so giebt es eine irreductible Gleichung zweiten Grades

$$\alpha dx^2 + \beta dy^2 + \gamma dz^2 + 2\delta dxdy + 2\xi dydz + 2\varphi dx dz = 0,$$

deren Coefficienten von  $x y z$  abhängen, welche die Gruppe  $G_r$  gestattet.

In diesem Falle lässt  $G_r$  offenbar eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$F\left(x y z \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

invariant. Interpretiren wir die  $\infty^3$  Charakteristiken dieser Gleichung als die Punkte  $(\xi \eta \varphi)$  einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, so liefert die Gruppe  $G_r$  eine gleichzusammengesetzte Gruppe  $G_r'$  von Punkttransformationen der Mannigfaltigkeit  $\xi \eta \varphi$ . Und offenbar giebt es eine nicht integrierbare Pfaffsche Gleichung

$$Ad\xi + Bd\eta + Cd\varphi = 0,$$

welche die Gruppe  $G_r'$  gestattet. Wir können sogar annehmen, dass diese Gleichung einen linearen Liniencomplex des Raumes  $\xi \eta \varphi$  darstellt. Bemerken wir, dass die Punkte des Raumes  $x y z$  bei unserer Abbildung  $\infty^3$  Curven im Raume  $\xi \eta \varphi$  liefern, deren Tangenten unserem linearen Complexe angehören, so erkennen wir, dass die entsprechende dreifach unendliche Schaar von Complexcurven die Gruppe  $G_r'$  gestattet. Jetzt führen wir statt  $\xi \eta \varphi$  solche neue Variablen  $x' y' p'$  ein, dass die Relation

$$Ad\xi + Bd\eta + Cd\varphi = \rho(dy' - p'dx')$$

besteht und interpretiren hiernach  $x' y'$  als Cartesische Coordinaten einer Ebene. Für diese Auffassung wird  $G_r'$  eine Gruppe  $G_r''$  von *Berührungstransformationen* dieser Ebene. Die früher besprochenen  $\infty^3$  Complexcurven liefern in der Ebene  $\infty^3$  Curven, die wir als Integralcurven einer Gleichung

$$\frac{d^3 y'}{dx'^3} = f\left(x' y' \frac{dy'}{dx'} \frac{d^2 y'}{dx'^2}\right)$$

auffassen. Dabei ist klar, dass diese Differentialgleichung 3, 0. die Gruppe  $G_r''$  gestattet. Hierdurch ist der folgende Weg zur Bestimmung von der gesuchten Gruppen  $G_r$  gefunden. Unter allen von mir bestimmten Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene nehme ich eine bestimmte und betrachte sie als eine Gruppe  $G_r''$ . Ich nehme nach meinen allgemeinen Regeln die allgemeinste bei dieser Gruppe

invariante Differentialgleichung  $\mathfrak{S}$ , O. und interpretire ihre  $\infty^3$  Integralcurven als die Punkte des Raumes  $x y z$ . Hierdurch erhalte ich eine Gruppe  $G_r$  von Punkttransformationen dieser Raumes, die eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Phi \left( x y z \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \right) = 0$$

invariant lässt. Ist diese Gleichung vom zweiten Grade, so erfüllt die gefunden Gruppe  $G_r$  die gestellten Forderungen. Fügen wir die Beschränkung hinzu, das die Gruppe  $G_r$  kein simultanes System  $dx: dy: dz = A: B: C$  invariant lassen soll so muss die Zahl  $r$ , wie eine einfache Betrachtung zeigt, grösser als fünf sein. Ausser der drei Gruppen von Berührungstransformationen einer Ebene, die sich nicht in Gruppen von Punkttransformationen umwandeln lassen, brauchen wir hier nach nur die folgenden Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene mit mehr als fünf Parameter zu discutiren, indem die übrigen keine Differentialgleichung dritter Ordnung invariant lassen:

$$q', x'q', x'^2q', y'q', p', x'p' \tag{A}$$

$$q', x'q', x'^2q', p', x'p' + y'q', x'^2p' + 2x'y'q' \tag{B}$$

$$q', x'q', x'^2q', p', x'p' + y'q', x'^2p' + 2x'y'q' \tag{C}$$

$$q', y'q', y'^2q', p', x'p', x'^2p' \tag{D}$$

Die Gruppe (A) lässt die drifach unendliche Curvenschaar

$$y' = a + bx' + cx'^2$$

invariant. Dabei werden die Constanten  $a, b, c$  transformirt durch die sechs folgenden inf. Transformationen

$$\frac{df}{da'} \frac{df}{db'} \frac{df}{dc'} a \frac{df}{da} + b \frac{df}{db} + c \frac{df}{db'} b \frac{df}{da} + 2e \frac{df}{db'} b \frac{df}{db} + 2c \frac{df}{dc}$$

1) Die im Texte gegebenen geometrischen Abbildungen benutzte ich u. A. in 1874 in meiner ersten Note über die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen. Gött. Nachr. Decbr. 1874. Sieh auch z. B. Math. Ann. Bd. V, wie ebenfalls Archiv for Math. . . . . , Bd. 3, 1878.

Nun aber lässt diese Gruppe von Punkttransformationen des Raumes  $a, b, c$  das simultane System

$$\frac{da}{1} = \frac{db}{0} = \frac{dc}{0}$$

invariant, und also liefert uns (A) keine Gruppe  $G_r$  die wir berücksichtigen brauchen.

Die Gruppe (B) lässt ebenfalls die Curvenschaar  $y' = a + bx' + cx'^2$  invariant und liefert dabei die folgenden inf. Transformationen von den Constanten  $a, b, c$ :

$$\frac{df}{da}, \frac{df}{db}, \frac{df}{dc}, b \frac{df}{da} + 2c \frac{df}{db}, -a \frac{df}{da} + c \frac{df}{dc}, -2a \frac{df}{db} - b \frac{df}{dc}$$

Diese sechsgliedrige Gruppe lässt die Gleichung

$$db^2 - 4 da dc = 0$$

invariant, und ist dabei durch eine projectivische Umformung aenlich mit der Gruppe von allen Bewegungen des *Euclidi-schen* Raumes.

Die Gruppen (C) liefert durch ganz analoge Betrachtungen die siebengliedrige Gruppe von allen Aehnlichkeitstransformationen des Euclidischen Raumes.

Die Gruppe (D) lässt die dreifach unendliche Curvenschaar

$$x'y' + Ay' + Bx' + C = 0$$

invariant. Dabei werden die Parameter  $a, b, c$  transformirt durch die sechs inf. Transformationen

$$\begin{array}{l|l} \frac{df}{dB} + A \frac{df}{dC} & \frac{df}{dA} + B \frac{df}{dB} \\ B \frac{df}{dB} + C \frac{df}{dC} & A \frac{df}{dA} + C \frac{df}{dC} \\ (-C + AB) \frac{df}{dA} + B^2 \frac{df}{dB} + Bc \frac{df}{dC} & (-C + AB) \frac{df}{dB} + A^2 \frac{df}{dA} + AC \frac{df}{dC} \end{array}$$

die eine projectivische Gruppe des Raumes  $a, b, c$  bestimmen diejenige nämlich welche die Fläche zweiten Grades

$$C - AB = 0$$

in sich transformirt.

(Fortsetzung folgt)

# De norske kyststrøgs geologi. IV.

(Porsanger-halvøen, med kart og profiler)

af

KARL PETTERSEN.

De landpartier, der her nærmere skulle blive omhandlede, dannes af de to smaa øer Maas-ø og Hav-ø samt den nordlige del af den store Porsanger-halvø — mod syd til en linje, der fra bunden af Rippe-fjorden ved halvøens vestlige side skjærer sig østover til Kistrand ved Porsanger.

## 1. Maas-ø

har et fladindhold af 0.1 norsk kv. mil (13 kv. km). Ved et lavt af alluvialmasser bygget ejde med kulmination af omkring 20' (6.3 m.) er øens fjeldmasse udskilt i to hoveddele. Den nordligste og forholdsvis største-del af øen naar sit højdepunkt i Hollændertinden (omkring 800' = 251 m.). Den sydlige del bygger et lavt aasdrag, der i Klubben naar sit højdepunkt med omkring 300' (94 m.).

Forskjellige notitser vedrørende Maasøens geologiske og fysikalske forholde findes optegnede hos

P. Hell. »Ephemer«: Vind. Anni. 1791 pag. 319.

Leop. v. Buch. »Reise durch Norwegen und Lappland« Berlin 1810, 2 Del pag. 65 og 68.

Vargas Bedemar. »Reise nach dem hohen Norden« Frankfurt a/M 2 Bind pag. 107, 290.

Keilhau. »Gæa norwegica 2 Del pag. 273.

Øen er bygget af gneisartede lagrækker. Ved ejdets vestlige afslutning stikker frem lodretstaaende lagrækker af en haard kvartsrig gneis under øst-vestlig strøgretning. Op efter fjeldskraaningerne fra ejdets nordlige side dannes bergarten af en mørk, noget løskornig glimmergneis, sammensat af hvidlig feltspat og kvarts med blade af mørk glimmer. Denne grundmasse er rigt indfældt med røde granater og endvidere med skjæl af sølvhvid glimmer. Højere op bliver bergarten fattigere paa glimmer, — idet rødlig feltspath træder stærkere frem og viser sig derunder smukt og regelmæssig lagdelt. I brudet kan dog bergarten her ofte træde frem med en renere granitisk struktur. Lagstillingen er overalt n.o. med  $30^\circ$  vestlig indskyden.

Den sydlige del af øen er bygget samstemmende hermed. Strøgretningen er her fremdeles nordsydlig med  $30^\circ$  vestlig indskyden. I et kvarter-tykt lag, i hvilket stenen optraadte temmelig grovkornig udviklet, saaes hyppig smaa søjler af et himmelblaat mineral, — antagelig Disten.

Ejdet, hvis kulmination som ovennævnt alene naar op til omkring 20' (6.3 m.) o. h., er bygget af fin strandsand (flyvesand), hvori forekommer — dog i det hele temmelig sparsom — skalrester af nulevende molluskarer. De her optrædende gamle, over den nuværende havflade liggende bølgeslagslinjer skal i det følgende blive noget nærmere omhandlede.

Den større straks nordenfor Maas-ø liggende Hjelms-ø har jeg ikke betraadt. Der er dog paa forhaand al grund til at forudsætte, at bergbygningsforholdene her i det væsentlige er samstemmende med Maasøens. Saavidt det i afstand kunde iagttages syntes ogsaa en nord-sydlig strøgretning med vestligt fald at raade langs efter øens sydlige side.

## 2. Hav-ø

har et fladeindhold af 8 kv. km. Øen naar en højde af omkring 800' (251 m.). Den faste fjeldgrund er bygget af en kvartsrig, temmelig tyndlaget glimmergneis med svag, vestlig eller sydvestlig indskyden. Stenens grundmasse dannes af kvarts med hvidlig til rødlig orthoklas i middelskornig forbindelse og er indfældt med smaa skjæl af mørk glimmer. Røde granater stikker sparsomt frem i bergarten. Skiktfladerne ere temmelig rigeligt belagt med blade af sølvhvid glimmer.

Havøens bergart betegnes af Kulhau (Gæa II Bd. pag. 274) som karakteristisk gneis.

## 3. Porsanger-halvø.

Den del af halvøen, der her nærmere skal omhandles, indbefatter den nordlige del af samme sydover til en eidlinje, der fører fra bunden af Rippelfjord over til Olderfjord i Porsanger. Med iberegning af de i samme indskaarne fjorde danner denne del paa det nærmeste en rektangulær firkant, der har en længde fra nord mod syd af omkring 70 km. og en bredde fra øst mod vest af omkring 45 km. Rektanglets fladindhold naar saaledes op til omkring 3200 kv. km. Medens halvøens østlige side langs Porsanger danner en temmelig jevn kystlinje, paa det nærmeste fri for fjordlignende indskjæringer, er derimod den nordlige og vestlige side indskaaret af en række af tæt paa hinanden følgende tildels dybe fjorde. Fra den nordlige side skjærer sig saaledes ind efter nord-sydlig retning Kobfjord, Ryggefjord og Kulfjord, langs den vestlige side Snefjord, Refsbotn og Rippetfjord i sydostlig retning. Af disse har Refsbotn en længde af 22 km., Rippetfjord en længde af omkring 15 km.

Langs Porsanger stiger landet temmelig langslut op i lave mildt formede aasdrag. Den samme orografiske karakter

gjør sig gjeldende over halvøens indre partier, der saaledes er at betegne som et af lavere aasdrag gjennemsat landparti. Af disse naa kun faa op til op mod 1500' (470 m.), flerheden derimod ikke synderlig over 1000 a 1100' (313 a 350 m.). Først ud mod halvøens afslutning mod vest kan landet paa sine steder naa op til en større højde, og stige op i mere karakteristisk udprægede fjelddrag, der i højde ligesom ogsaa i ydre formforholde forøvrigt danne en stærk modsætning til de østenfor liggende aasdrag. Noget indenfor bunden af Snefjord rejser sig saaledes et længere fjelddrag, som naar en højde af antagelig op imod 2000' (627 m.) og en lignende højde naar fjeldpartiet, der udfylder halvøen mellem Refsbotn og Rippefjord. Langs Rippefjordens sydvestlige Side rejser sig et længere drag Stensfjeldet, der ligeledes antages at skulle naa opimod 600 m.

Af disse saa stærkt afvigende orografiske forholde vil man allerede paa forhaand kunne drage ret bestemte slutninger om afvigelser i geologisk henseende.

Da halvøens nordligste punkt ligger paa en bredde af henimod 71°, medens det sydligste punkt inden det her omhandlede landparti ikke naar længer syd end til 70° 20', maa vegetationen naturligen være højst fattig. Idet landet — naar enkelte strøg langs den vestlige side fraregnes — som før nævnt ikke stiger op til nogen synderlig højde, og da fjeldgrunden her i regelen er dækket med myr og andet løst jordsmon, er overfladen vistnok oftest smykket med en om end tarvelig græsvækst. Træ- eller buskartede vækster er i høj grad tilbagestrængt. Paa Maasø er der ikke at opdage andet end de svageste spor af saadanne. Først ind mod bunden af de smaa fra nord indskydende fjorde Kulfjord og Ryggefjord sees en og anden forkrøblet vidjebusk. Lidt indenfor bundene af Ryggefjord findes en liden birkeskog — dannet af 1 a 2 m. højt birkekrat. Indenfor bunden af Refsbotn optræder birken allerede noget frødigere, men er dog ogsaa her helt for-



krøblet. Indefter Rippefjorden skyder birken villigere frem, og navnlig antager landskabet efter det fra Rippefjordbotten indskydende dalføre en ret venlig karakter ved sine grønne og af ret frodigt buskads af birk beklædte aasdrag. — Her naar birkegrænsen allerede op til en højde over havfladen af omkring 800' (251 m.).

Bergbygningsforholdene efter disse strøg<sup>1</sup> skulle nu først søges nærmere belyste i henhold til de under befaringerne gjorte aflæsninger og dette dernæst søges samlet i en sammenstillende oversigt.

Fastlandsholmen — en lav holme, der skyder frem ved det østlige indløb til Kulfjorden — er bygget af gneis i smuk lagdeling, Strøgetning o.—v. fald s.

Fiskernæsset ved Kulfjordens østlige side. Haard glimmerrig gneis indfældt med røde granater. Strøgetning n.—s. fald 30° v. Fjeldgrunden er her hyppig gjennemsat af aabne Gangsprækker og Kløfter. Disse løbe indbyrdes parallelle og skjærer sig ind i en retning fra omkring n.v. til s.v.

Kula paa den østlige side af fjorden ind mod bunden. Haard glimmerrig gneis. Strøg 40° fald 30° s.o.

Over det lave ejde, der fører fra bunden af Kulfjord over til Ryggefjord bygges fjeldgrunden af den samme glimmerrige gneis, ogsaa her indfældt med røde granater. Lagene vise en svag sydlig indskyden.

Ved fjordens vestlige bund — den saakaldte Vesterbotn — fremdeles svagt sydligt fald.

Langs den vestlige side af Kulfjorden 60° sydostlig indskyden.

Ved Sandviken optræder i de laveste niveauer en smuk graalighvid tyndlaget gneis, spættet med øjne eller knuder af

<sup>1</sup>) Enkelte notitser vedrørende Porsangerhalvøens geologi findes optegnet hos Leop. v. Buch og Vargas Bedemar i de fornævnte skrifter; se fremdeles Karl Pettersen: Geologisk Profil over Sorø, Seland østover til Porsanger, Kristiania Vidensk. Selsk. Forhandl. 1867.

hvid orthoklas. Strøgretningen er her slaaet om til  $60^\circ$  nord-vestlig. Derover under conform lagstilling lag af en mørkere mere tyklaget gneis, rigt indflettet med blade af brunlig mørk glimmer og røde granater.

Fra Sandviken nordefter langs Kulfjordens vestlige side holder strøgretningen sig gennem en længere strækning uforandret, medens faldet tildels bliver stejlere, paa sine steder næsten vertikalt. De stratigrafiske forhold ville findes nærmere belyste i rits fig. 1, der er optrukket efter Indre og Ytre Storfjeld nordover til Storvik. Indre og Ytre Storfjeld danne to kappeformige fjelde, der naa en højde af antagelig noget over 1000' (314 m.).

Ved Indre Storfjeld optræder i de lavest liggende niveauer en graa gneis ( $\alpha$ ) i temmelig steil lagstilling, derover lagrækker ( $\beta$ ), der dannes af en mørk glimmerrig gneis i stejl tildels noget snoet lagstilling. Paa ritset fig. 1 er ( $\alpha$ ) og ( $\beta$ ) betegnet som fra hinanden udskilte afdelinger. Det lod sig imidlertid ikke gjøre af lejningsforholdene at drage mere afgørende slutninger om, hvorvidt her i virkeligheden skulde foreligge tvende mere selvstændige afdelinger eller ej. Da forskjellen i petrografisk henseende mellem disse vistnok ikke er større, end at der ofte under en og samme utvivlsomme gneisafdeling vil kunne være at paavise noget tilsvarende, antages det foreløbig at være rettest at indordne lagrækkerne ( $\alpha$ ) og ( $\beta$ ) som led under samme hovedafdeling. Lagstillingen inden ( $\beta$ ) afbøjer, som det vil fremgaa af ritset nordefter mer og mer fra sin stejle lagstilling og falder langs efter Ytre Storfjeld paa det nærmeste sammen med horisontalfalden. Ved Indre Storvik optræder en graa gneis med udpræget lagdeling. Bergarten viser sig her hyppig indfældt med røde granater. Den samme gneisafændring bygges fjeldgrunden videre nordover forbi Ytre Storvik, Troldfjordnes, Sandviknes til Eiterfjorden, ligesom selve Eitertinden findes bygget af samme bergart. Lagstillingen er overalt svagt bølge-

formig til horisontal. Den horisontale lagstilling er fremdeles raadende langs Havø-sund. Bergarten bliver her mer og mer glimmerrig og nærmer sig tildels en renere glimmerskifer. Langs Havø-sundet stiger fjeldpartierne temmelig stejlt op fra havfladen og ere helt op til top (omkring 1000' = 314 m.) bygget af temmelig horisontalt liggende lagrækker — tildels med svag sydvestlig indskyden.

Ved Myrfjord — langs fjordens sydlige side — er den svage sydvestlige indskyden fremdeles raadende.

Lidt nordenfor Selvik optræder i de laveste niveauer langs stranden haarde gneisartede lagrækker — hvide strata i veksling med hornblendeskifer, hvilken sidste rigelig er indfældt med tildels store røde granater. Strøget er her nord-syd, faldet snart øst snart vest. Ogsaa her var de højere liggende fjeldpartier — saavidt det kunde sees nedenfra — byggede af en mørkere glimmergneis.

Store og Lille Latø ere to smaa øer eller holmer, der dukker frem vestenfor Selvik. Efter hvad der kunde sees under forbisailing var store Latø bygget af gneisartede strata, der viste en temmelig stejl østlig indskyden. Lille Latø er bygget af graa gneis, der viser en strøgrætning fra n.v.—s.o. med 20° s.v. indskyden. Ved Selvik er som før nævnt indskydningen svag østlig. Gneisen er her overalt rigt indfældt med røde granater.

Fjeldgrunden ind efter Bagfjord dannes af en haard glimmerrig gneis i regelen i svævende lagstilling.

Over nes mellem Bagfjord og Snefjord optræder en renere glimmerskifer indfældt med røde granater i smuk regelmæssig lagdeling og med svagt østligt fald.

Over nes til Bustadsund bygges fjeldgrunden af en tyndlaget mild tildels glindsende glimmerskifer, der viser en strøgrætning af N. 30° O. med fald flere gange vekslende fra s.o. til n.v. Faldvinkelen naar sjældent over 20°. Fjeldgrunden er her overalt transversalt paa strøgrætningen gjennemsat af

lodrette kløftninger eller udfyldte gangsprækker, der stryger parallele og optræder i en i regelen temmelig regelmæssig indbyrdes afstand af 2 a 3' (0,6 a 0,9 m.).

Langs Bustadsund optræder den samme milde glimmerskifer som oftest i en paa det nærmeste horisontal lagstilling og indeslutter her hyppig lag eller lejeformige dannelser af en smuk hvid gneisartet sten, sammensat af hvid tildels labradoriserende feltspath som forherskende bestanddel i forbindelse med kvarts. Denne halvt granitartede grundmasse gennemses af render af sølvhvid glimmer og en røgkvarts, der tildels ligger udspændt i striber i glimmerrenderne, delvis ogsaa i den granitiske grundmasse og lige-løbende med disse. Glimmerrenderne snor sig noget uregelmæssigt i den saaledes baandet-tribede sten. En og anden granat sees at stikke frem fra glimmerrenderne. Disse hvide baandlag optræde temmelig hyppig og sees ogsaa at stikke frem opefter de herfra opstigende fjeldpartier lige til øverste højde. Bergarten i disse gneisartede baandlag minder ikke længer om gneisen langs efter halvøens nordligste del, men viser et fra denne temmelig afvigende særpræg.

Ved Hatvig optræder ejendommelige mørke — paa skiktfladerne ofte brunlige rustfarvede skiferdannelser —, hvis grundmasse dannes af kvarts tildels i forbindelse med hvidlig feldtspat, rigt indblandet med mørk glindsende sammenhængende glimmer. Skiferen findes sparsomt indvokset med røde granater. Stenen er i regelen tyndlaget — kan tildels optræde i næsten papirtynde lag, —

Fra Hatvik indover mod Sauhavn bygges fjeldgrunden overalt af de samme i dagen oftest brunrøde skiferdannelser, der vise svag vestlig eller sydvestlig indskyden. Hvorvel stenen altid sparsomt kan indeholde hvidlig orthoklas, er den dog ingeniunde af gneisartet struktur, men er snarere at betegne som en ejendommelig glimmerskifer, der ved den mørke sammenhængende glimmer, der optræder tildels som en stærkt

forherskende bestanddel, synes petrografisk at skulle staa lerglimmerskiferen nærmere eller danne som en stærkere metamorfoseret afændring under denne.

Ved Kvalnes dannes fjeldgrunden af en graa tyndlaget gneisartet sten — af en temmelig smaaorning struktur og rigt indvokset med røde granater. Bergarten kan her maaske nærmest være at betegne som en granulit. Denne optræder i noget vekslende lagstilling og skyder indunder horisontalt liggende lagrækker der dannes af kvartsitisk glimmerskifer i veksling med lag af en lerglimmeragtig skifer. Disse horisontalt liggende lagrækker ere utvivlsomt at indordne under samme afdeling som skiferdannelserne ved Hatvik, og staa saaledes i et overlejningsforhold til det lille ved Kvalnes fremstikkende granulitparti.

Fra Kvalnes ind mod Slotten bygges fjeldgrunden af lagrækker i horisontal til svævende lagstilling, tilhørende den yngre afdeling.

Indenfor Slotten optræder i denne hyppig tildels mægtige bænke af en hvid gneisartet sten, der i langt stærkere maal end de ovennævnte indlejninger i strøget langs efter Bustadundet ere indblandede med en mørk lerglimmeragtig glimmer. Stenen er ofte tildels ret rigt indfældt med granater af en frisk rød farve; Granaterne findes indvoksede saavel i den hvide feltspath som i kvarts, og danne saaledes stens tidligst udskilte bestanddel. Indover langs Refsbotn optræder denne hvide gneisafændring i stadig veksling med glimmerskifer og lerglimmerskifer som et sammenhængende felt, der breder sig indefter over de østenfor liggende fjeldpartier. Langs begge sider af Lillefjorden optræder den hvide sten mere forherskende, glimmerskiferen derimod mere som underordnede lag.

Lagstillingen er overalt svævende til horisontal.

Denne afdeling fortsætter saaledes til henimod bunden af fjorden, hvor den afløses af en yngre afdeling, der nærmere

skal omhandles i Profilrits fig 3. Profil fra Refsbotten østover til top af Garde-Varre.

- a. tyndlaget kvartsitisk skifer i smuk lagdeling og med 15° s.o. indskyden.
- b. derover mild buklet lerglimmerskifer — i dagfladen og paa skiktfladerne stærkt okkerfarvede, hyppig med gul efflorescents. Strøgretning n.—s., fald 20 a 30° ø.
- c. kvartsitisk skifer og glimmerskifer tildels i veksling med hornblendeskifer. Lagstillingen snoch og forvreden.
- d. smuk finkornig tyndlaget sandstenagtig skifer. Strøg n.—s. i vertikal lagstilling.
- e. kvartsitisk sandstenartet skifer i veksling med milde buklete lerglimmerskifere. Smaa brunligsorte granater stikke hyppig frem som smaa knuter eller tyter.
- f. Straterne dannes her af graa sandstenartet kvartsit med indlejninger af ren hvid kvarts og i veksling med de milde glindsende granatspættede lerglimmerskifere. Efter lange strækninger raader en regelmæssig nord-sydlig strøgretning med østligt fald af 45° tildels ogsaa stejlere. Ogsaa de andre lave kuppelformige indtil 5 a 600' (157 a 188 m.) høje aaspartier, der stige op ved bunden af Refsbotten, ere byggede af den buklete sorte lerglimmerskifer, der her fra fod til top optræder mere eneraadende med svagt østligt fald.

Naar de under (c) opførte lagrækker fraregnes — idet der med hensyn til dem paa grund af den forvredne lagstilling og de petrografiske forhold kunde være mulighed for at de maatte være at udsondre som led under en ældre afdeling — udgjør (a) til (f) forøvrigt led under et og samme sammenhængende lagsystem. Den buklete glindsende lerglimmerskifer, der tildels i mægtige lagrækker optræder efter de lavere liggende niveauer — saaledes som nys nævnt i aaspartierne nede ved fjordbunden — gjenfindes nemlig hyppig som mere underordnede lag langs efter den hele profillinje

fra fjordbunden til Garde-Varre. Mindre klart stiller sagen sig derimod med hensyn til det indbyrdes aldersforhold mellem denne lagrække og den vestenfor liggende skiferafdeling, der bygger fjeldgrunden langs Refsbotns østlige side fra Selkop ud imod Bustadsund. Der har ikke været anledning til mere umiddelbart at aflæse grændseforholdene imellem disse. Efter de aflæsninger, der foreligge, synes det dog nærmest at skulle fremgaa at lerglimmerskiferfeltet maa staa i et overlejningsforhold til afdelingen langs Refsbotn. Da denne sidste er sammensat af langt stærkere krystallinsk udviklede skiferstrata med tilknytning af hvide gneisartede lagrækker, saa synes dette ogsaa paa forhaand at skulle pege i samme retning.

Efter den vestlige side af fjorden lidt udenfor bunden bygges fjeldgrunden fremdeles af sort glindsende lerglimmerskifer under  $15^\circ$  sydvestlig indskyden. Skiferen er dog her allerede noget stærkere krystallinsk udviklet og optræder heller ikke saa smukt lagdelt som længere østover.

Ved Turenes optræder en renere glimmerskifer i hyppig veksel med tynde lag af ren kvarts. Strøg n.-s., fald  $30^\circ$  v.

Mellem Turenes og Danielsvik hvidlig kvarsitisk sandstenartet skifer i smuk lagdeling med  $30^\circ$  v. fald. De samme kvartsitiske skifere bygge det temmelig høje fjeld over Danielsvik og optræde her — saavidt det kunde sees under forbisejling — fremdeles med vestligt eller nordvestligt fald.

Udimod Refsnes ren glimmerskifer med  $20$  a  $30^\circ$  n.v. fald.

Selve Refsneset er bygget af gneis med rødlig orthoklas. Strøgetning N.  $20^\circ$  Ø. med  $30^\circ$  v. fald — altsaa i konkordant lagstilling med den i nærheden fremstikkende glimmerskifer. Det synes saaledes som om gneisen her staar i et overlejningsforhold til den straks indenfor Refsneset optrædende glimmerskifer. Gneisen, der i bruddet tildels viser en gneisgranitisk struktur, er forøvrigt smukt og regelmæssig laget. De underste lag vise en mere graalig grundfarve, ere

fattigere paa feltspath og gaa saaledes over til en glimmergneis eller glimmerskifer.

Fæster man sig nærmere ved stratificationsforholdene, saaledes som de optræde fra Turenes udover til Refsnes, saa har man her en sammenhængende lagrække af glimmerskifer og kvartsitisk glimmerskifer, der afsluttes ved Refsnessets gneis. Imellem denne afdeling af glimmerskifer og den udenfor liggende lerglimmerskiferafdeling træder grændseforholdene ikke saaledes frem, at det efter de hidtil gjorte aflæsninger lader sig gjøre at drage sikre slutninger angaaende det relative aldersforhold. De saa stærkt afvigende petrografiske forhold og ikke mindst den omstændighed, at glimmerskiferen indeslutter gneisartede strata, synes imidlertid med bestemtthed at pege hen paa, at glimmerskiferen er ældre end lerglimmerskiferen. I saa tilfælde vil glimmerskiferafdelingen antagelig være at indordne under en af urfjeldets yngre afdelinger.

Langs Samelssund sydover til henimod Brandvik bygges fjeldgrunden af graa haard gneisartet sten, der er indfældt med smaa røde granater, og som petrografisk maaske nærmest kan være at betegne som en granulit. Strøgetning n.-s., fald  $\emptyset$ .

Strax nordenfor Brandvik veksler den granulitartede gneis med en mørk glindsende glimmerskifer.

Ved indbøjning til Ripperfjord graa granulitartet sten i regelmæssig lagdeling. Strøg N.  $40^{\circ}$  O med  $45^{\circ}$  nordvestligt fald.

Bergbygningsforholdene langs den nordlige side af Reppefjorden vil findes nærmere belyst ved profilrits fig. 4, der er lagt efter en linje, der fra Kvalsund fører ind til fjordbunden og derfra videre over Porsangerhalvøen indtil Olderfjord ved Porsanger.

Længst mod vest i profilet rejser sig et aasdrag mellem Kvalsund og den lille bugt, der ved handelsstedet og kirke-



stedet Kvalsund skjær sig ind mod det lave ejde, der herfra fører sydover til Næverfjord. Dette aasdrag er bygget af grønne, sorte og fiolette lerskifere tildels i højst forvreden lagstilling. Langs Kvalsund — saaledes ved Beritsjord — viser skiferen en stejl østlig til sydøstlig indskyden. Ved den østlige side af aasdraget — i nærheden af kirkestedet Kvalsund — er strøgetningen mere regelmæssig nord-sydlig med stejlt vestligt fald. Skiferen veksler med lag af tyndlaget Magnesiakalksten. Et intil 100' (31 m.) mægtigt lag af en noget smudsiggraa ren dolomitartet sten stikker som et mere selvstændigt lag frem mellem skiferrækkerne ved handelsstedet, og den samme dolomitartede sten skyder frem i et lag af lignende mægtighed langs aasdragets vestlige afheld mod Kvalsund. Maaske er det et og samme lag, der saaledes gennem sætter aasdraget gennem hele dets brede.

Langs det egentlige Kvalsund sees de grønne skifere paa flere steder gennem sæt af stokformige partier af kvarts. I kvartsen indfældt Kalk med spor af kobberkis.

Ved Nakken bryder frem i de lavere niveauer en mørk diorit, gennem sæt af aarer af kvarts med noget kalk.

De her omhandlede lerskiferdannelser ere ganske ensartede med de, der bryder frem ved bunden af Altenfjord, og tilhøre Dividalsgruppen (T. Dahls Raipas-system). Den ved Nakken frembrydende Diorit er petrografisk ganske at sammenstille med den diorit, der saa ofte findes langs Alten og Kvæningen at gennem sætte Dividals-gruppens lagrækker.

Dette skiferfelt fortsætter indefter langs fjorden i sammenhæng indtil Kagelv og er overalt karakteriseret ved de hyppige mer og mindre mægtige indlejninger af magnesiakalksten. Afdelingen bygger her de lavere aasdrag indtil foden af Stensfjeld, der som en ret udpræget murvæg skyder op over disse, ligeløbende med fjorden. Inden de højere niveauer kan til denne afdeling henhørende led være at følge videre indtil henimod bunden af fjorden. Skiferafdelingen

gjennemsættes paa forskjellige steder af diorit i mer eller mindre mægtige partier. Ved Russenes straks østenfor handelsstedet Kvalsund bryder saaledes frem enkelte mindre partier af diorit. Henimod skiferfeltets afslutning østover gjennemsættes skiferen af flere parallelløbende drag af diorit, i hvilke der ofte er at paavise en overgang til asbestartet Serpentin. Disse drag stryge her i retning fra n.o.-s.v. og kunne have en anseelig udstrækning i længde. Her optræder ogsaa et længere drag af ren serpentin, — ogsaa her oftere stærkt asbeartet. (Chrysotil).

Indenfor Kageiv afløses Dividalsgruppen af lagrækker af sandstenartet kvartsit, kvartsitisk glimmerskifer i en paa det nærmeste horisontal lagstilling. Med hensyn til det relative aldersforhold mellem Dividalsgruppen og den nye her optrædende afdeling saa lykkedes det ikke mere direkte at paavise dette. I grændsestrøgene fandtes fjeldgrunden altid dækket af løse masser. Den stejle lagstilling inden Dividalsfæltets lagrækker, der afløses af glimmerskiferafdelingens horisontaltliggende strata, peger med al bestemthed paa at en sondring her maa blive at gjøre mellem tvende særskilte grupper. At glimmerskiferafdelingen her maa være den yngste er der vistnok al grund til at forudsætte.

Den her omhandlede skiferafdeling breder sig fra bunden af fjorden østefter over Porsangerhalvøen, og er her fulgt langs Rippelfjorddalen, langs Skagelo til Ymervandene og videre til Oldervand. Overalt er lagstillingen svævende til horisontal. Bergarten optræder her oftest som en sandstenagtig kvartsit i veksling med glindsende glimmerskifer. Det er øjensynligt at man her har for sig den samme skiferafdeling, som tidligere er omhandlet i profilet fra Refsbotn op til Garde-Varre. I strøgene om Oldervand og derfra ned til Porsanger gaar bergarten over til en noget renere glimmerskifer.

Som bidrag, der i enkelte retninger kunne tjene til nærmere at belyse de her omhandlede forhold, skal knyttes

nogle aflæsninger, som der har været anledning til at anstille paa enkelte punkter langs efter Porsangerhalvøens vestside — noget søndenfor det omraade, der er lagt ind under det til afhandlingen knyttede kart. De landpartier, der her noget nærmere have været undersøgte, ere strøgene om Komagfjord og Korsfjord ved Vargsundets sydlige udmunding, samt strøgene om den fra Alten fra øst indskydende Lerbotn.

De yterste partier af det udenfor handelsstedet Komagfjord fremspringende nes Garnes, er i sine laveste niveauer bygget af en gneis-granitisk sten, som længere ind gaar over til en udpræget laget gneis, der viser en nord-sydlig strøgretning i vertikal lagstilling. Gneisen overlejes af lagrækker af en haard tyndlaget feltspathrig skifer med knuder af rødlig orthoklas og grønlig mild glimmer, saa den tildels kan nærme sig en lerglimmerskifer. Denne skifer viser en strøgretning af N. 60 a 70° Ø. med 30 a 40° n.v. fald og ligger saaledes over gneisen under discordant lagstilling. Længere indover optræder lagrækker af grønne og graalige, glindsende skifere i bølgeformig lagstilling, gjennemsat af partier af diorit, der petrografisk ganske falder sammen med dioriten langs Rippefjorden. Efter de lave aasdrag, der føre over fra Komagfjord til Korsfjord, bygges fjeldgrunden af de samme grønne skifere, der indeslutte tildels mægtige lag af kornig kaksten og Magnesia-kalksten. Disse skiferrækker synes i petrografisk henseende vistnok at staa Balsfjordens grønne skifere nærmere end skiferdannelserne, saaledes som de i regelen optræde under Dividals-gruppen. Da de imidlertid som nævnt indeslutter lag af renere Magnesiakalk, der er at opfatte som et mere bestemmende led for Dividalsgruppen, medens saadanne ikke ere paaviste inden Balsfjordgruppen, er der vel grund til at indordne de her omhandlede skiferdannelser under den førstnævnte gruppe. At de findes tilknyttede til eller gjenembrudte af partier af en diorit, ganske ensartet med den, der paa saa mange steder bryder frem

mellem Dividualsgruppens lagrækker, synes ogsaa at skulle pege i samme retning. Denne diorit, der hidtil ikke er paa- vist i noget gjennembrydningsforhold til Balsfjordgruppen synes saaledes nemlig at maatte være ældre end denne.

Fra handelsstedet Jupvik er bygningsforholdene undersøgte efter en profillinje (rits fig. 5), der er lagt sydefter over fjeldpartierne — til omtrent midtvejs mellem Lerbotn og den fra det inderste af Alten mod øst indskydende sidefjord Refsbotn.

- a. diorit. Paa et sted gjennemsættes dioriten af et 7 a 8' (2 a 2.5 m.) mægtigt lag af graalig kvartsitisk sten.
- b. grønne til Dividualsgruppen hørende skifere, strøg N. 20° V. i stejlstaaende lagstilling med vestlig indskyden.

Rits fig. 6 belyser bergbygningsforholdene efter en linje, der fra Kviby ved bunden af Lerootn er lagt østover Porsangerhalvøen til Lerbotnvand.

- a. grønne skifere. Strøg N. 45 Ø. fald 45° n.v.
- b. grønlig milde skifere i veksling med kvartsitisk skifer  
Strøg n.-s. fald vertikalt.
- c. graa kvartsitisk skifer med grønlig kloritisk glimmer i blade, i svævende til horisontal lagstilling.

Lagrækkerne (a) og (b) tilhøre Dividualsgruppen, (c) derimod en yngre afdeling, som antagelig maa være at parallelisere med skiferrækkerne indenfor Refsbotn og Rippefjorden (profilritsene fig. 3 og 4.)

---

De her omhandlede ländstrøg ere byggede af lagrækker tilhørende Urberget og Dividualsgruppen, hvortil endvidere kommer lagrækker tilhørende en yngre her vidt udbredt gruppe, hvis plads i den geologiske følgerække for tiden ikke lader sig fastsætte med mere absolut sikkerhed.

## I. Urberget

bygger fjeldgrunden over de smaa øer Maasø, Havø og Hjelmes-ø og træder ligeledes eneraadende frem langs Porsangerhalvøens nordlige og vestlige side — fra dens afslutning mod Magerøssund og Havøssund sydover til Rippefjorden. I orografisk henseende minder disse af urbergets strata byggede landpartier endnu *delvis* om de søndenfor liggende kyststrøg. Fjeldmasserne naa her sammenlignelsesvis vistnok ikke nogen synderlig højde, men stiger i regelen dog temmelig stejlt op fra havfladen. Ligeledes træder den for de sydligere kyststrøg saa karakteristiske fjorddannelse ogsaa her ret udpræget frem og er ogsaa paa det nærmeste knyttet til det af urberget byggede omraade.

I en nys offentliggjort afhandling<sup>1)</sup>, hvortil er knyttet en skematisk oversigt over bergbygningsforholdene efter det nordlige Norge, er urberget (gundfjeldet) ovenfra nedad udsøndret i følgende led:

|           |   |                                     |
|-----------|---|-------------------------------------|
| Yngre     | } | d. Vest-Finmarkens glimmergneis.    |
| afdeling. |   | c. Seilands granatgneis (granulit). |
| Ældre     | } | b. Ældre gneis med gneis-granit.    |
| afdeling. |   | a. Tromsøssundets hornbleudogneis.  |

Urbergets ældste afdeling (a) — som forøvrigt alene træder frem paa et enkelt sted, nemlig i strøget om Tromsøssund, hvor det bygger et ret vidstrakt felt — gjenfindes ikke efter de heromhandlede strøg. Det samme gjælder ligeledes afdelingen (b). Derimod ville afdelingerne (c) og (d) være at paavise her, og hertil vil endvidere blive at føje en yngre underafdeling (e), hvortil der hidtil ikke inden det nordlige Norge er paavist noget tilsvarende led, og som derfor her vil blive at opstille som en ny og mere selvstændig under-

<sup>1)</sup> Balsfjordsgruppens plads i den geologiske følgerække Tr. Mus. Aarsheft. VI. 1883.

afdeling under urberget. Forøvrigt vil det ofte være forbundet med vanskeligheder paa kartet at afsætte bestemte grændselinjer mellem de til urberget hørende underafdelinger — dels paa grund af de i grændsestrøgene ofte saa stærkt vekslende overgangsforhold og dels fordi de for den ene eller anden afdeling mere betegnende petrografiske karakterpræg ogsaa kan være at paavise udenfor vedkommende afdelings egentlige omraade, om og her vistnok altid som noget mere tilfældigt og underordnet. Heller ikke træder stratifikationsforholdene efter de egentlige grændsestrøg saaledes frem, at fuldt afgjørende slutninger i saa henseende altid lader sig drage. Hertil kommer endvidere, at de gjorte aflæsninger nærmest knytte sig til kyst- og fjordlinjerne, medens der ikke har været anledning til at udstrække disse efter nogen synderlig maalestok mere direkte indover indlandspartierne.

### c. Granatgneis (granulit).

Som paa et andet sted<sup>1)</sup> paavist optræder langs den sydlige side af Seiland i Vest-Finmarken en graa temmelig tyndlaget gneis, hvis grundmasse dannes af hvidlig feltspath og kvarts, og som er saa rigt indfældt med smaa røde granater, at disse maa være at betegne som en af bergartens mere væsentlige bestanddele. Denne gneis, der i førnævnte afhandling er opført under navnet granatgneis, kan maaske nærmest være at betegne som granulit. Den optræder langs Seiland i de lavere niveauer umiddelbart fra havfladen opefter, oftest i smale zoner, og skyder ind under de mægtige masser af gabbro, der her bryder frem. Granuliten paa Seiland er ikke fundet saaledes mere umiddelbart knyttet til de paa

---

<sup>1)</sup> Bidrag til de norske kyststrøgs geologi III. Archiv for Math. og Naturv. 8 B. Kristiania 1883.

denne ø optrædende afdelinger af den ældre gneis-granit og den yngre glimmergneis, at bestemte slutninger kunde drages om granulitens aldersforhold til de nysnævnte afdelinger. Da granuliten imidlertid paa grund af sin renere krystal-linske udvikling og sin helt igjennem mere ensartede struktur i petrografisk henseende synes at staa gneis-graniten nær-mere end glimmergneisen, fandtes deri grund til i den geo-logiske følgerække at gruppere den mellem den ældre gneis-granit og den yngre glimmergneis.

Efter de i denne afhandling omhandlede strøg optræder granulitartede afændringer paa et par steder, nemlig i strøget om Kvalnes ved Refsbotns nordlige side samt paa halvøen mellem Refsbotn og Rippefjorden, hvor de langs Samels-sund bygger fjeldgrunden efter en længere zone.

Ved Kvalnes optræder lag af en ret udpræget granulit, der her inden et snævert begrændset felt bygger fjeldgrun-den efter de lavere niveauer. Den smukt og regelmæssig lagede granulitartede sten viser her en strøgetning af N. 60° Ø og skyder med 30° s.-o. fald ind under horisontalt lig-gende lagrækker, der tilhøre den ovennævnte yngre afdeling (e).

Langs Samelsund bygges fjeldgrunden af en mere tyk-laget haard graa gneis, der tildels kan antage et mere euri-tlignende præg. Ved indbøjningen til Rippefjord antager bergarten imidlertid en renere granulitisk karakter, og efter bygningsforholdene, som de her træde frem, synes der at være grund til at forudsætte, at den haarde gneis langs Samelssund tilhører samme afdeling som granuliten ved Rippefjord. Langs Samelssund er strøgetningen n.-s. med østlig indskyden, ved indbøjningen til Rippefjord er den slaaet om til 40° (N. 40° Ø) med 45° nord-østligt fald. Det er forøvrigt ikke nærmere undersøgt, hvor langt østover den granulitiske zone breder sig frem. Den paa kartet optrukne grændse mod øst er saaledes helt hypotetisk.

#### d. Vest-Finmarkens glimmergneis.

I førnævnte afhandling »Bidrag til de norske kyststrøgs geologi« er nærmere omhandlet en over Vest-Finmarkens øer optrædende til urberget hørende afdeling, der dannes af lagrækker af glimmerrige gneisartede strata i veksel med glimmerskifer, hornblendeskifer og kvartsitiske dannelser. Foruden i petrografisk henseende skiller denne afdeling sig fra den ældre gneis-granitiske afdeling ogsaa deri, at der inden samme raader en stærkere udpræget regelmæssig lagdeling. Man vil saaledes aldrig her finde sig stedt i den usikkerhed, der saa ofte kan trænge sig frem, naar man færdes inden det gneisgranitiske feltt, hvorvidt man har for sig et massivt eller laget feltt.

Denne over Vestfinmarkens øer saa udbredte afdeling — som i nysnævnte afhandling er opført under navnet »Vest-Finmarkens glimmergneis« — danner ogsaa efter de her omhandlede strøg et stærkt fremtrædende bygningsled. Maasø og Havø ere helt byggede af lagrækker tilhørende denne afdeling. Dette er antagelig ogsaa tilfældet med Hjelmessø. Rimeligvis er den eller de paa Magerø optrædende gneisafdelinger ligeledes at henføre hertil. Endvidere breder afdelingen sig ud over et større sammenhængende omraade langs den nordlige og vestlige del af Porsanger-halvø.

Ogsaa her dannes afdelingen af oftest smukt og regelmæssig lagede strata, der forøvrigt i petrografisk henseende kunde variere ganske betydelig. De mest karakteristiske af disse skulle her lidt nærmere omhandles.

1. Stenen danner en graalig grundmasse; fine, regelmæssig vekslende graa og hvide striber. Grundmassen dannes af feltspath og kvarts i smaa kornig forbindelse. Den er paa det nærmeste glimmerfri, idet selve skiktfladerne kun højst sparsomt findes dækket med skjæl af sølvhvid glimmer. Hvid krystallinsk feltspath findes hyppig stikkende som knuter eller øjne frem fra grundmassen. Denne



er højst sparsomt spættet med smaa granater. Denne afændring optræder paa flere steder efter de lavere niveauer, men maa efter lejningsforholdene at dømme antagelig være at indordne under denne afdeling (d). (Sandviknes paa vestlige side af Kulfjorden).

2. Bergarten danner en graa, haard, ustribet grundmasse, sammensat af feltspath og kvarts i temmelig smaakornig forbindelse, og højst sparsomt indflettet med smaa mørke glimmerskjæl, medens selve skiktfladerne af de ofte ikke mer end 1 cm. tykke lag ere dækkede mere sammenhængende af en mørk glindsende glimmer (Havø).
3. Bergarten danner en temmelig regelmæssig graalig hvid og brun finstribet skifer, hvor en brunlig glimmer optræder temmelig forherskende. I bruddet viser grundmassen en brunlig mat farve og er spættet med større og mindre knuter eller øjne af hvid feltspath. (Ved Sandviknes ved Kulfjorden i veksling med afændring no. 1.)
4. Bergarten danner en graalig sort grundmasse, der er sammensat af feltspath, kvarts og smaa uregelmæssig omstrøede blade af sort glindsende glimmer, der her optræder temmelig forherskende, — det hele i en temmelig smaakornig forbindelse. Skiktfladerne ere derimod mere sammenhængende, dækkede med et lag af den sorte glindsende glimmer.

I veksling med disse gneisartede lagrækker kan en renere glimmerskifer paa sine steder træde frem, — altid dog, saavidt iagttaget, kun højst underordnet.

Langs Porsanger-halvøens nordlige og vestlige del optræder paa forskellige steder i de lavere liggende niveauer en haardere mere tykklaget sten. Denne viser sig i bruddet af en mere grovkornig struktur og træder i det hele frem som en mere typisk udpræget gneis. Da denne efter de strøg, hvor den er paavist, altid optræder som det underliggende for den ovenomhandlede glimmergneis, kunde der maaske være grund

til at rejse spørgsmaal om, hvorvidt den kunde være at udsondre fra glimmergneisen og derimod at indordne den under en ældre afdeling — saaledes her nærmest under gneisgraniten. Det skal ogsaa medgives, at denne haarde gneis i enkelte retninger minder om gneisgraniten. Under befaringerne var jeg stadig inde paa dette spørgsmaal, uden at det dog lykkedes mig at udrede det i fuld klarhed. Paa den anden side skal imidlertid fremholdes, at stenen i andre retninger i petrografisk henseende synes nær knyttet til glimmergneisen, ligesom ogsaa overgangsforholde her kan være at følge mellem disse indbyrdes. Medens granater kun højst sjældent — i ethvert tilfælde mikroskopisk — er at paavise som indblanding i gneisgraniten eller de til samme knyttede gneisartede afændringer, er den her omhandlede gneis ligesom ogsaa glimmergneisen rig paa indfældte granater. Heller ikke synes stratifikationsforholdene mere bestemt at skulle pege hen paa, at her kan foreligge tvende mere selvstændige underafdelinger. Da denne haarde gneis i det hele, saavidt iagttaget, kun optræder i smalere zoner og inden mere begrændsede omraader, vil det maaske idetmindste foreløbig, indtil mere omfattende undersøgelser her kunne blive anstillede, være rettest at indordne den under glimmergneisens afdeling.

Med hensyn til lagstillingen inden denne afdeling, saa kan denne variere temmelig betydelig. Over Maasø, Havø og Hjelmesø er nord-sydlig strøgretning med vestligt fald forherskende.

Nord-sydlig strøgretning er ligeledes raadende langs Porsanger-halvøens vestlige side, fra Havø Sund sydover til Snefjord, men her oftest med østlig indskyden. Dog er ogsaa paa sine steder tæt paa hinanden følgende svingninger i faldretningen at paavise. Om Kulfjorden bøjes lagstillingen til dels efter fjordsiderne. Faldet er i regelen svagt, overstiger sjelden 30°, men gaar paa den anden side hyppig derunder

og nærmer sig ofte horizontalfladen. Mere undtagelsesvis er dog ogsaa at paavise en stejl faldvinkel, saaledes navnlig op efter Indre Storfjeld ved Kulfjordens vestlige side, hvor lagstillingen nærmer sig vertikalfladen. Her afbøjes imidlertid snart den vertikale lagstilling og gaar under stærke bugtninger udefter Ytre Storfjeld efterhaanden over til at antage en svævende til horizontal stilling. (Se profilrits fig. 1). Afdelingens lagrækker have saaledes utvivlsomt efter enkelte strøg været udsatte for indvirkningen af ret stærke foldningskræfter. Og da den ovenomhandlede efter de lavere niveauer optrædende gneis navnlig er at paavise, hvor disse foldningskræfter synes at have arbejdet med den største intensitet, kan der maaske være nogen sandsynlighed for, at gneisen her optræder som en gennem disse metamorfoseret omdannelsesform efter den mere oprindelige glimmerskifer.

#### e. Glimmerskifer.

Henimod Snefjord antager bergarten en fra glimmergneisen mere bestemt afvigende petrografisk karakter. Den gneisartede struktur er her paa det nærmeste tilbagetrængt, og bergarten optræder som en renere glimmerskifer i veksling med kvartsitartede skifere. Petrografiske forhold synes her temmelig bestemt at pege hen paa, at man er kommen ud fra den egentlige gneisafdeling og derimod naaet ind til en yngre afdeling, der dog fremdeles antages at maatte blive at indordne under urfjeldet. Lige fremme aflæsninger med hensyn til lejningsforholdene, der mere bestemt kunne pege hen paa, at man her har for sig en yngre afdeling, foreligger imidlertid ikke.

Den her omhandlede afdeling bygger landpartierne mellem Snefjord og Refsbotn ligesom ogsaa den store frem springende halvø mellem Refsbotn og Rippefjord, — her dog med fradrag af den før omhandlede granulitiske zone langs

Samelssund. Hvor langt afdelingen skyder sig østover, har der ikke været anledning til nærmere at undersøge. Paa kartet er den afgrændset i overensstemmelse med de slutninger, der i saa henseende antages at kunne drages ved at se hen til de orografiske bygningsforhold, saaledes som disse træde frem efter indlandsstrøgene. Porsanger-halvøens højeste fjeldpartier ville i henhold hertil komme til at ligge ind under denne afdeling.

De herunder hørende lagrækker dannes af forskellige afændringer af glimmerskifer. Langs Bustad-sundet optræder en tyndlaget skifer med smaaskjællet glimmer — oftest med stærkt rustfarvede skiktflader. Langs den vestlige side af Refsbotn bygges fjeldgrunden af mørke mere bukledede glindsende skifere, der dog i strøget fra Turenes ud mod Refsnes lidt efter lidt afløses af eller gaar over til kvartsrige skifere. Derimellem ogsaa lag af kvartsitiske tildels sandstenartede afændringer. Bergarten antager saaledes paa begge sider af Refsbotn et noget afvigende petrografisk præg. Paa grund heraf yderligere at sondre afdelingen i tvende mere selvstændige underafdelinger, vil dog for tiden neppe være berettiget. Afdelingens to hovedpartier ligge — som det vil sees af kartet — helt fra hinanden udskilte, og af lejningsforholdene vil det saaledes i ethvert tilfælde ikke være anledning til i saa henseende at drage mere bestemte slutninger.

En tredie afændring — der nedenfor nærmere skal omhandles — optræder efter et temmelig vidstrakt felt langs Refsbotns østlige side.

Udover Refsnes overlejes glimmerskiferen under konform lagstilling af rene gneisartede strata. Gneisen er temmelig kvartsrig med klumper af rødlig feltspath. — Strøgretning omkring N. 20° Ø. med 30° vestligt fald. Gneisen maa utvivlsomt her danne et underordnet led inden glimmerskiferafdelingen, hvad ogsaa overgangsforholdene synes at antyde. I de dybere liggende niveauer bliver gneisen mere og mere

feltspathfattig og gaar saaledes over til eller nærmer sig i petrografisk henseende en glimmerskifer. Den svage faldvinkel, hvorunder gneisen her overlejer glimmerskiferen, synes ogsaa at skulle tale mod berettigelsen af en forudsætning om, at denne gneis skulde tilhøre en ældre afdeling, der gennem inversion var skudt op over den yngre glimmerskifer.

Med hensyn til strøgrætningen, saa svinger den i regelen i nord-sydlig retning oftest dog med en østlig afbøjning af 20 a 30°. Faldvinkelen er svag og overstiger sjældent 30°. Faldretningen snart mod n.v. snart mod s.o. Foldningskræfter, der dog i det hele kun have virket med ringe intensitet, have saaledes her indvirket forrykkende paa den oprindelige lagstilling.

Foruden som nys omhandlet paa Refsnesset findes ogsaa paa andre steder gneisartede dannelser knyttede til glimmerskiferen. Langsefter Bustad-sund sees paa forskellige steder ligefra de lavere niveauer til højeste fjeld lag af en hvid bergart at stikke frem mellem glimmerskiferens lagrækker. Stenens grundmasse dannes af en snehvid feltspath, temmelig sparsomt indblandet med kvarts i korn eller drummer. Selve grundmassen er temmelig fri for glimmerindblanding. Derimod gennemses den af striber, dannede af sølvhvid glimmer med kvarts, og disse stikke frem i noget bugtet og indbyrdes ogsaa noget afvigende løb. Trods dette svarer dog sribningen nogenlunde til skiktningen. Selve skiktfladerne ere temmelig rigt dækkede med blade af sølvhvid glimmer.

Der er allerede ovenfor hentydet til, at der langs Refsbotns østlige side optræder en særlig afændring af glimmerskiferen. Ved Hatvig dannes saaledes bergarten af en haard efter skikt- og dagfladerne stærkt brunlig oftest tyndlaget skifer. Grundmassen dannes af kvarts med noget hvidlig feltspath og en mørk mild glimmer. Denne sidste, der paa de noget buklede skikt- og dagflader optræder som et helt sammenhængende fag, antager her gennem forvitring

den stærke brunrøde farve. Stenen besidder ingeni lunde nogen gneisartet struktur, men maa trods den indblandede feltspath snarest være at betegne som en glimmerskifer, der staar den mildere lerglimmerskifer nærmere end gneisen. Disse skiferdannelser bygger fjeldgrunden indefter langs fjorden og træder her frem i en paa det nærmeste horizontal lagstilling. I strøgene om Slotten, der her skjærer sig ind som en dybere bugt, sees denne tyndlagede haardskifer i veksling med tildels mægtige baandlag af en hvidlig sten. Denne danner en haard, stærkt krystallinsk udviklet, tildels med granater indfeldt grundmasse, sammensat af hvid til rødlig feltspath med kvarts og mørk glimmer. Glimmeren er ensartet med den mørke glimmer i ovenomhandlede tyndlagede skifer og optræder i disse renere gneisartede baandlag, foruden som udskilte blade inden grundmassen, ogsaa i hele sammenhængende flag. Skjønt stærkt gneisartet faar bergarten herigjennem et præg, der minder om den tyndlagede skifer, hvori den findes indlejet. Dels dannes ogsaa disse baandlag af en smudsig graa flasrig afændring — saa rigt indblandet med skjæl og flag af den mørke glimmer, at den i petrografisk henseende staar den tyndlagede skifer nærmere end gneisen. Denne afændring er — saavidt iagttaget — fri for granater. Fra Slotten indover træder denne smudsige gneisartede afændring alt hyppigere og hyppigere frem, og navnlig i strøgene om Lillefjorden danner den det helt forherskende bygningssled, hvorvel ogsaa her i hyppig veksling med den tyndlagede haardskifer eller en noget stærkere udpræget glimmerskifer

Denne afdeling breder sig frem østover i et temmelig bredt bælte og bygger her lave smaahumpede aasdrag.

Med hensyn til denne her omhandlede skiferafdelings plads i den geologiske følgerække, saa ligger forholdet i saa henseende i henhold til de hidtil gjorte aflæsninger vistnok ikke klart for dagen. Ved Kvalnes findes den i overlejningsforhold til den lille her optrædende granulitafdeling og er

saaledes yngre end denne. Et andet spørgsmaal kan det derimod være, i hvilket aldersforhold den staar til glimmerskiferen — om den nemlig skal være at indordne under denne, eller om den maa blive at udsondre fra samme.

Til fordel for den sidste forudsætning kunde fremholdes de saa stærkt afvigende petrografiske forhold ligesom ogsaa den noget afvigende lagstilling, idet denne inden den heromhandlede afdeling er gjennemgaaende horizontal.

Da imidlertid glimmerskiferen langs Bustad-sundet allerede indeslutter hyppige baandlag af en hvid gneisartet sten, og forholdet i saa henseende her synes at falde sammen med det, der i end stærkere grad træder frem langs efter Refsbotns østlige side, saa kunde heraf maaske ligesaasnart den slutning være at drage, at det hele felt her er at indordne under en og samme afdeling enten som sideordnede led eller ogsaa opstillede som ældre og yngre under et mere omfattende hovedled. I sidste tilfælde antager feltet langs Refsbotn at maatte blive at opstille som den yngste underafdeling paa grund af den her saa stærkt raadende horizontale lagstilling. Inden den egentlige glimmerskiferafdeling fjerner lagstillingen sig i regelen adskilligt fra horizontalfladen.

Til nærmere udredning heraf vil der udkræves mere omfattende undersøgelser. Foreløbig er jeg mest tilbøjelig til at indordne Refsbotns felt som en underafdeling under glimmerskiferen, der saaledes bliver at udsondre i tvende afdelinger, nemlig:

b. Yngre gneisartet glimmer- og lerglimmerskifer i veksling med lag af flasrig gneisartet sten.

a. Ældre glimmerskifer.

Det skal tilføjes, at samtlige her omhandlede led af urformationen ere — saavidt hidtil iagttaget — fri for kalkstensindlejninger. Derimod fortjener det at fremholdes, at røde granater overordentlig hyppig og tildels efter rig maalestok findes indfældt som accessorisk bestanddel.

Hertillands har betegnelsen »grundfjeldet« i senere tid været almindelig benyttet for de ældste krystallinske dannelser. Forsaavidt disse kunde være at opfatte som et mere homogent eller dog i det væsentlige mere ensartet hele, vilde der vistnok intet være at indvende mod en saadan betegnelse. Den vilde i saa tilfælde falde sammen med betegnelsen »fundamental gneis« eller »centralgneis«, der hyppig benyttes af franske og engelske geologer. Anderledes vil derimod sagen i saa henseende komme til at stille sig, naar disse gamle forsteningsløse præ-kambriske dannelser ikke fremtræde som noget saadant i petrosafisk som i stratigrafisk henseende ensartet hele, men derimod maa blive at opløse i rækker af paa hinanden følgende lagede og i det hele utvivlsomt sedimentære afdelinger. I dette tilfælde vil det neppe være sprogrigtigt at beholde betegnelsen »grundfjeldet« i denne hidtil hos os anvendte udvidede betydning som et fælles-navn for disse præ-kambriske dannelser. Skal navnet fremdeles blive at holde oppe, bør det vistnok føres tilbage til en enkelt snævrere begrændset afdeling inden urformationen, nemlig til dennes ældste led, forsaavidt et saadant i henhold til videnskabens standpunkt maatte være at paavise.

Da det saakaldte grundfjeld efter det nordlige Norge, som ovenfor paavist, maa blive at opløse i rækker af mer eller mindre selvstændige underafdelinger, antages det altsaa hensigstmæssigt at ombytte denne saaledes i sig selv vildledende betegnelse med en anden mere tilsvarende. Der antages heller ikke for det nordlige Norges vedkommende at skulle være grund til at søge betegnelsen opretholdt inden en mere begrebsmæssig begrændsning. Istedendfor grundfjeldet vil derfor her blive gjenoptaget den tidligere ogsaa hos os benyttede betegnelse »urfjeldet« (urberget — urformationen), der som et fællesnavn for de forsteningsløse præ-kambriske afdelinger vistnok er fuldt auvendeligt. Den benyttes jo og-



saa temmelig almindeligt af svenske ligesom ogsaa af tyske geologer — saaledes urzeit urgneisformation, urgebirge hyppigt ved siden af betegnelsen »archaische formationsgruppe«.

I henhold til de hidtil gjorte aflæsninger vil urberget efter det nordlige Norge saaledes blive at opløse — ordnet efter aldersrækken ovenfra nedad — i en yngre og en ældre gruppe, hver med sine underafdelinger, nemlig:

- |                  |   |                                                                                                                                                                                                             |
|------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Yngre<br>gruppe. | } | <p style="text-align: center;">e. Glimmerskifer.</p> <p>2. Gneisartet haardskifer, glimmerskifer og lerglimmerskifer med indlejninger af smudsig-graa flasrig gneisartet sten.</p> <p>1. Glimmerskifer.</p> |
|                  |   | <p style="text-align: center;">d. Glimmergneis</p> <p>(mørk glimmer stærkt fremtrædende bestanddel).</p>                                                                                                    |
| Ældre<br>gruppe. | } | <p>c. Granulitartet gneis.</p> <p>b. Gneis med gneis-granit.</p> <p>a. Tromsøundets hornblendegneis.</p>                                                                                                    |

Af disse optræde afdelingerne a og b ikke — saavidt hidtil iagttaget — inden det i denne afhandling omhandlede omraade.

De præ-kambriske dannelser udskilles efter den almindelig vedtagne opstilling i tvende hovedklasser, nemlig urgneis-formationen og urskifer-formationen. Den første falder sammen med de amerikanske geologers »Laurentian«, den anden svarer paa det nærmeste til disses »Huronian«. Samtlige ovennævnte inden det nordlige Norge optrædende underafdelinger af urfjeldet ere antagelig nærmest at opstille som led under den ældre urgneis-formation og saaledes at betegne som laurentinske.

I en nylig offentliggjort afhandling<sup>1)</sup> »Öfverblick öfver mel-larste Sveriges urformation« fremholder A. E. Törnebohm, at

<sup>1)</sup> Geol. för. förh. Stockholm 1883, VI bd. hefte 12.

gjennem de sidste 3 aartier den opfatning stærkt har gjort sig gjældende mellem de svenske geologer, at urformationen — og her vel nærmest den ældre urgneis-formation, hvorvel det ikke ligefrem siges — er ligesom de yngre formationer sammensat af flere ulige led, der følge paa hinanden i en vis orden, saaledes at ogsaa denne formation vil kunne lade sig inddele i forskjellige underafdelinger. Af Forselles (1854), A. Erdmann (1868), A. E. Törnebohm (1873) og D. Hummel (1875) er der saaledes til forskjellige tider gjort forsøg paa nærmere at bestemme og begrænse saadanne afdelinger. Hvorvel disse forskellige forfattere i det enkelte derunder komme til noget afvigende resultater<sup>1)</sup>, saa stemme de dog samtlige deri overens at henlægge de mere typiske gneis-dannelser til en ældre afdeling, de mere finkornige finkiferrige bergarter som granulit, helleflint, glimmerskifer og urlerskifer til en yngre afdeling. Som det vil sees, falder altsaa denne gruppering i det store taget nogenlunde sammen med den, der her er gjort gjældende for det nordlige Norges vedkommende. Man skal i saa henseende nemlig bemærke, at den svenske urlerskifer, der i Törnebohms række efterfølges af en yngre gneis-granit, her maaske nærmest kan være at sammenstille med vor vistnok stærkt metamorfoserede lerglimmerskifer, der træder frem i ovennævnte afdeling e. 2. <sup>2)</sup> Efter Törnebohms fremstilling optræder den alene paa et enkelt sted som en helt lokal dannelse, i samme niveau, som en andalusitførende glimmerskifer, der er at træffe paa forskellige steder.

For Finlands vedkommende inddeler F. I. Wiik de archæiske dannelser i 3 grupper, nemlig gneis-formationen (lau-

<sup>1)</sup> Cfr. Geol. för. förh. Stockholm VII bd. 5 hefte pag. 241. Hr. Holst fremholder her, at disse forsøg for Sveriges vedkommende maa betragtes som fuldkomment mislykkede.

<sup>2)</sup> Geol. för förh. Stockholm 1883, VI bd. pag. 641.

rentisk), glimmerskifer-formationen (huronisk) og kalk-skifer-kvartsit-formationen (takonisk). Hvad den sidste gruppe angaar, saa vil den, forsaavigt den skal ækvivalere de amerikanske takoniske dannelser, være at henføre til de kambriske dannelser. I ethvert tilfælde er den vistnok yngre end vor ovennævnte afdeling (e) og vil altsaa ikke komme i betragtning ved sammenstillingen her. Det samme gjælder Wiiks glimmerskifer-formation, forsaavidt den i virkeligheden skulde være at betegne som huronisk. Et spørgsmaal var det dog, om denne ikke kunde være af noget ældre oprindelse, og i saa tilfælde vilde den maaske være at sammenstille med vor glimmerskifer-afdeling (e). Den laurentiske afdeling opløser Wiik i tvende underafdelinger, nemlig en ældre, der dannes af glimmergneis, samt en yngre, der dannes af hornblendeskifer ofte med pyroxenindlejninger, samt af felsitskifer, og som sammenstilles med Törnebohms granulit-afdeling. I henhold hertil synes ogsaa forholdene inden Finland — sagen seet i det hele og store — at falde i det væsentlige sammen med de, der raade langs efter det nordlige Norge. — Noget mere i detaillien gaaende forsøg paa en udskillen af muligens snævrere afgrændsede underafdelinger foreligger imidlertid endnu ikke, saavidt vides, for Finlands vedkommende.

Et saadant forsøg er derimod for det mellemste Sveriges vedkommende gjort af Törnebohm i ovennævnte afhandling. Han omhandler deri tre forskjellige ud fra hinanden skilte territorier byggede af urformationens ældre dannelser. Imellem disse optræder anseelige partier af graa gneis under forhold, der synes at antyde, at de paa disse forskjellige steder maa tilhøre omtrent samme geognostiske niveau. Denne graa gneis ligger her tildels over en rød gneis og gneis-granit. Denne lagdelte gneis, som saaledes her optræder inden den ældre afdelings dybere niveau, viser en forherskende graa farve og er ikke sjelden hornblendeførende. Af de inden det nordlige Norge optrædende afdelinger af det laurentiske ur-

fjeld vil det maaske være Tromsøsundets hornblendegneis (afdeling (a)), der nærmest kunde være at parallelisere med Törnebohms graa-gneis. Den ligger nemlig, efter hvad der antages, — fuldt bevis derfor foreligger ikke — under kyststrækningens gneis-granit og optræder saaledes her som det dybest liggende bygningsled. Törnebohms graa gneis og vor hornblendegneis fjerne sig vistnok fra hinanden i petrografisk henseende temmelig stærkt, men nogen afgjørende vægt er vistnok ikke at lægge derpaa. I saa tilfælde vil vor afdeling (b) — kyststrækningens gneis og gneis-granit — være at parallelisere med den røde og graa gneis-granit, der ligger over Törnebohms graa gneis.

Den laurentiske gruppes yngre afdeling begynder efter Törnebohms gruppering med granulitiske dannelser, der i den geologiske følgerække indtager lignende plads som vor granulitafdeling (a), der imidlertid i vor opstilling er opført som yngste led inden den ældre afdeling. Denne uoverensstemmelse mellem Törnebohms og vor gruppering er naturligvis ligeoverfor det her omhandlede spørgsmaal af liden betydning. Da det granulitiske led inden følgerækken under begge opstillingsformer beholder den samme plads, vil det i saa henseende være ligegyldigt, hvad enten den indordnes under den ældre eller yngre afdeling. Endvidere afsluttes Törnebohms yngre afdeling med granit-gneis og gneis. Dette er paa en vis maade ogsaa tilfældet med vor yngre afdeling, der afsluttes med afdelingen e. 2. med sine tildels mægtige lag af gneisartede dannelser, der i petrografisk henseende vistnok afviger temmelig stærkt fra Törnebohms yngre gneis-granit. Med hensyn til urlerskiferen, der af Törnebohm opføres som liggende under gneis-graniten eller i ethvert tilfælde som ældre end denne, saa skal i saa henseende henvises til de nysnævnte ovenfor gjorte bemærkninger vedrørende dette punkt. Hvad de led angaar, der ligge mellem granuliten og yngste gneis-granit, saa vil det vistnok være

vanskeligt her at kunne gennemføre nogen mere bestemt parallelisering mellem bergbygningsforholdene, saaledes som de træde frem inden det mellemste Sverige og det nordlige Norge. Nogen særlig vægt er der imidlertid neppe at lægge paa denne ulighed. Selv inden de af Törnebohm omhandlede paa nærliggende urterritorier er der jo i det enkelte adskillig ulighed at paavise. Törnebohm fremhæver derfor ogsaa, at rækkefølgen inden Sveriges urformation er saa vekslende inden de forskjellige omraader, at den ordensfølge, der gjælder for det ene, alene i sine hovedtræk men ikke i den mere gennemførte detalje vil være at gjenfinde i de andre.

For Alpernes vedkommende har prof. Bonney i henhold til en notitse i geol. Magaz. London 1884 pag. 280 opløst den der optrædende archæiske formation i følgende led ovenfra nedad:

- C. Lustrous schists.
- { B'' Friable gneiss.
- { B' Pietri verdi.
- { B Bedded gneiss.
- A. Central gneiss,

altsaa opstillet i 3 hovedled — det mellemste med 3 underafdelinger.

Af de efter det nordlige Norge optrædende led vilde maaske afdelingerne (a) og (b) nærmest kunne være at sammenstille med Bonneys afdeling A. Afdelingen (c) kunde maaske nærmest falde sammen med Bonneys afdeling B og afdelingen (d) med Bonneys B''. Til underafdelingen B' vilde der i saa tilfælde ikke være at paavise noget tilsvarende efter det nordlige Norge. Med hensyn til Bonneys afdeling C, saa vilde denne maaske nærmest være at sammenstille med det takoniske system, og vilde i saa tilfælde være at indordne under den kambriske formation. Nogen yderligere deling af Bonneys afdelinger A og B foreligger der ikke, — saavidt vides.

Heller ikke for de nordamerikanske unionsstater vedkommende er der hidtil — saavidt vides — gjort forsøg paa at opløse den laurentiske formation i paa hinanden følgende mere bestemt udskilte led.

Caradas laurentiske formation er derimod af Logan delt i tvende grupper, der dog, saavidt det kan sees af beskrivelsen, ikke lader sig sammenstille med den her opførte gruppering for det nordlige Norges vedkommende.

Til nærmere belysning af det her fremholdte hidsættes følgende:

## Tabellarisk oversigt over den laurentiske formation.

| Det nordlige Norge<br>(Pettersen).                                                                                      | Mellemste Sverige<br>(A. E. Törnebohm).                                                                                                          | Finland.<br>(F. I. Wiik).                                                                       | Alperne.<br>(Bonney).                                                                              | Nord America.<br>(Hunt). |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| e. Glimmerskifer.<br>2. gneisartet haardskifer, lerglimmerskifer med indlejninger af gneis.<br>1. ældste glimmerskifer. | h. Urgranit.<br>g. granitgneis.<br>.....<br>f. andalusittørende glimmerskifer (urlerskifer).<br>.....<br>e. Porfyroid.<br>d. granulitartet sten. | c. glimmerskifer.<br>.....<br>b. Hornblendeskifer, fel-sitskifer.<br>.....<br>a. flasrig gneis. | B'' Friable gneiss.<br>B' Pietri verdi.<br>.....<br>B Bedded gneiss<br>.....<br>A. Central-gneiss. |                          |
| d. Glimmergneis.<br>c. granulitartet sten.<br>b. Gneis og gneis-granit.<br>a. Hornblendegneis (Tromsøundets gneis).     | c. Urgranit.<br>b. granitgneis, gneis.<br>a. graa gneis (cordierit-gneis, epidotgneis).                                                          |                                                                                                 |                                                                                                    |                          |

## L a u r e n t i s k.

11\*

1) Sterry Hunt har forøvrigt i en afhandling »Sur les terrains eozoïques ou précambriens i Bull. Sol. Geol. de France 1882, optrykket en nærmere sammenstilling mellem Europas og Americas archæiske dannelser. Jeg har ikke havt anledning til at gennemlæse denne afhandling, og har saaledes her ikke kunnet tage hensyn til samme.

## II. Dividals-gruppen.

Efter det her omhandlede omraade optræder lagrækker tilhørende denne gruppe i et forholdsvis smalt bælte langs den sydlige side af den i vest-østlig retning indskydende Rippefjord fra sammes udmunding indtil henimod fjordens indre bund. Fra fjordens udmunding breder gruppen sig endvidere sydover langs Kvalsund. Hvor langt sydover den her er at følge i mere sammenhæng, har der hidtil ikke været anledning til nærmere at undersøge. Som bekjendt optræder lagrækker tilhørende denne gruppe stærkt udviklede langs efter de indre partier af Alten. Men ogsaa langs den østlige side af Alten i strøget mellem Altenfjordens bund og Rippefjorden er den som ovenfor omhandlet paavist paa et par punkter, nemlig i strøgene om Komagfjord og Korsfjord, ligesom ogsaa langs Lerbotns sydlige side. Der kan saaledes vistnok være nogen sandsynlighed for, at lagrækker tilhørende denne gruppe ved nærmere undersøgelse vil findes stærkere udbredt end hvad der for tiden er kjendt.

Langs Rippefjorden dannes gruppens lagrækker af røde, sorte og grønne lerskifere og lerglimmerskifer med hyppige indlejninger, dels af magnesiaholdig kalksten, dels af renere dolomit. Da et saadant med omtrent lignende mægtighed er at paavise i nogenlunde tilsvarende højde ogsaa langs efter aasdragets vestlige side ud mod det egentlige Kvalsund, er der vistnok sandsynlighed for, at det kan være et og samme lag, der her træder frem langs begge aasdragets sider og her indlejet mellem gruppens stærkt foldede skifere.

Som tilfældet saa hyppigt er inden Dividalsgruppen, er skiferdannelserne ogsaa her ofte gjennemsatte af eller tilknyttede til større eller mindre partier af en mørk fra smaa-til grovkornig diorit, der overalt, hvor den træder frem inden gruppen, viser et temmelig ensartet let gjenkjendeligt petrografisk grundpræg. I saa henseende adskiller den sig



ogsaa ganske væsentlig fra de dioritiske bergarter, der saa hyppig findes tilknyttede til kyststrækningens gneis-granit og her navnlig over øerne inden Karlsø præstegjeld. Prøver af diorit fra Rippefjorden har ikke været underkastet mikroskopisk analyse; derimod er en diorit fra Vandvaag i Karlsø præstegjeld — her ligeledes knyttet til Dividalsgruppen — tidligere beskrevet af A. Helland<sup>1)</sup>. Langs efter Rippefjorden optræder dioriten paa forskjellige steder i mindre partier, brydende frem mellem skiferlagene. Antagelig optræder den ogsaa i et større mere sammenhængende felt efter det høje langstrakte Stensfjeld, der skyder op som et højedrag umiddelbart fra det af skifer byggede lavere liggende fjeldparti. Stensfjeldet er vistnok ikke nærmere undersøgt, men efter hvad der kunde sees i frastand, syntes dette fjelddrag for en stor del at være bygget af en massiv dioritartet sten.

Med hensyn til spørgsmaalet om den her optrædende diorits oprindelse, saa lader det sig af lejnings- og kontaktsforholdene vistnok ikke med bestemthed afgjøre, om den er eruptiv eller ikke. Det skal dog i saa henseende bemærkes, at der af petrografiske hensyn synes at fremgaa, at dioriten og skiferen idetmindste delvis staar i et vist indbyrdes genetisk tilknytningsforhold. Imellem den grønne diorit og den grønne skifer træder der saaledes ret bestemte overgangsforhold frem, hvorunder dioriten lidt efter lidt gaar over til skifer eller omvendt. Heller ikke er det at overse, at der paa sine steder, saaledes i nærheden af Jeipoik ved Lerbotn, optræder en rødlig diorit, der viser en grundfarve, der falder sammen med den rødlig violette skifers — en farve, der her, ligesom tilfældet er ved den rødlige skifer, nærmest maa være at tilskrive en indblanding af et mangansilikat. Skulde dioriten være af eruptiv oprindelse, saa kunde der maaske

---

<sup>1)</sup> Mikroskopiske undersøgelser af en del bergarter i det nordlige Norge. Tromsø Museums Aarshefte I. Løbe n. 17.

være nogen sandsynlighed for, at skifer materialet er udgaaet fra dioriten. Skiferen gjennemsættes i saa tilfælde ikke af dioriten, men maa da tværtimod være yngre end denne. Forholdet mellem diorit og skifer i disses indbyrdes sammenstød synes ogsaa at kunne pege i denne retning. Dioriten optræder saaledes aldrig, saavidt iagttaget, gangformig frem gennem skiferens lagrækker, men altid i mere uregelmæssig formede partier.

Dioriten er her paa flere steder i strøget langs den sydlige side af Rippefjorden gennem overgange knyttet til serpentintede dannelser. I de højere liggende niveauer ovenfor og indenfor Kagelv optræder saaledes forskellige dioritiske aasdrag eller rygge, der tildels gennem lange retninger stryge fra omkring N.V. til S.O. I disse sees dioriten hyppig at gaa over til en ofte stærkt asbestartet udviklet serpentin (chrysotil), tildels med overdrag af grønlig talk. Her synes overgangsforholdet at skulle ligge klart for dagen. I nærheden heraf optræder et større drag, helt bygget af serpentintet sten. Der kan vistnok være grund til at forudsætte, at ogsaa denne her mere selvstændigt optrædende serpentin nærmest maa være at opfatte som et sekundært omdannelsesprodukt efter en mere oprindelig diorit.

De i strøgene om Komagfjord og Korsfjord optrædende, tildels kloritiske skifere med indlejninger af kalksten og magnesia-kalksten, staa oftere som det synes i petrografisk henseende de inden Balsfjordgruppen optrædende skiferdannelser nærmere end Dividalsgruppens. Da imidlertid skiferdannelserne om Komagfjord og Korsfjord ere knyttede til eller gjennemsatte af partier af lignende dioritisk sten, som den, der saa hyppig bryder frem inden Dividalsgruppen, antages der idetmindste foreløbig nærmest at være grund til at indordne ogsaa de her nævnte dannelser under Dividalsgruppen.

De langs den sydlige side af Lerbotn optrædende lag-

rækker af skifere tilhøre den utvivlsomme Dividalsgruppe. Ogsaa her gennemses skiferen af drag af den for gruppen saa karakteristiske diorit. Midt inde i et saadant temmelig vidt udbredt dioritfelt fandtes et 7 a 8' (2,2 a 2,5 m.) mægtigt lag af en graa kvartsitisk sten.

Med hensyn til lagstillingen inden gruppen, saa viser denne sig efter de her omhandlede afdelinger gennemgaaende stærkt afbøjet fra horizontalfladen. Langs Rippefjorden er lagstillingen i regelen stærkt forvreden og træder hyppig frem med uregelmæssige afbøjninger og foldninger. Langs den sydlige side (af Lerbotn nærmer lagstillingen i regelen sig temmelig stærkt til vertikalplanet.

I saa henseende raader der en paatagelig forskjel mellem det over Porsangerhalvøen optrædende Urfjeld og Dividalsgruppen. Medens lagstillingen vistnok paa sine steder inden Urfjeldet kan findes stærkere afbøjet og tildels endog at nærme sig vertikalplanet, er den dog i det hele her temmelig svævende. Naar lagstillingen derimod inden den yngre Dividalsgruppe optræder saa afvigende herfra med forholdsvis langt stærkere og hyppigere brydninger og foldninger, saa vil heraf fremgaa, at de kræfter, der har virket forrykkende inden Dividalsgruppen, i saa henseende samtidig ikke efter nogen synderlig maalestok kan have strakt sin virksomhed udover det i nærheden liggende Urfjeld. Da Rippefjorden skjærer sig ind efter grænsen mellem Dividalsgruppen og Urfjeldet, vil heraf formentlig fremgaa, at selve Rippefjorden nærmest kan være at opfatte som en dislokationsspalte. Sænkningen af fjeldgrunden maa nemlig antages at have fundet sted langs efter fjordens sydlige side, hvor Urfjeldet saaledes er sunket ned under havfladen, medens de til den yngre Dividalsgruppe henhørende lagrækker nu optræde her i de lavest liggende niveauer. Langs den nordlige side af fjorden kan derimod fjeldgrunden paa det nærmeste

enten have været uberørt af forrykningen eller ogsaa samtidig være skudt opad.

I strøgene om Komagfjord er forholdet derimod i saa henseende noget afvigende fra det, der raader langs Rippefjorden. Her indtage nemlig de til Dividalsgruppen henførte lagrækker en mere svævende lagstilling, medens den her optrædende underliggende gneis eller gneis-granit stikker frem i vertikal lagstilling.

I partierne om Lerbotn, hvor en stejl til vertikal lagstilling helt forherskende raader inden Dividalsgruppen, har der ikke været anledning til i saa henseende at gjøre nogen sammenstillen, da lagrækker tilhørende Urfjeldet her ikke — saavidt hidtil aflæst — er fundet stikkende frem.

Med hensyn til gruppens absolute aldersforhold, saa har der heller ikke her været anledning til at gjøre saadanne aflæsninger, der kunde egne sig til herover at kaste et klarere lys. Gruppen har hidtil vist sig fri for forstevinger. Skulde man mere specielt fæste sig ved de rent petrografiske forhold, saa synes det som om gruppen nærmest kunde være at sammenstille med den nordamerikanske »huroniske gruppe«. Andre forhold tale imidlertid med temmelig bestemthed mod berettigelsen af en saadan sammenstillen. Efter al sandsynlighed maa Dividalsgruppen være yngre end den huroniske. Forøvrigt har jeg med hensyn til dette spørgsmaal at henviser til tidligere bemærkninger herom.<sup>1)</sup>

### III. Porsanger-gruppen.

Denne gruppe, der breder sig frem over den største del af Porsangerhalvøens indre og østlige partier, dannes af lagrækker af kvartsitiske tildels sandstenartede skifere i veksling

<sup>1)</sup> Cfr. »Det nordlige Sveriges og Norget Geologi« Arkiv for Math. og Naturv. Kristiania 1878.

med glimmerskifer og milde bukledede lerglimmerskifere. Gruppen bygger et af mildt formede aasdrag gjennemsat lavlandsparti. Egentlige fjelde træder ikke frem inden samme. De geologiske bygningsforhold er her undersøgte efter 3 forskellige profillinjer. Den første er lagt fra bunden af Refsbotn østover til top af Garde-Varre. Her bygges fjeldgrunden af tyndlagede kvartsitiske skifere i veksling med milde bukledede med smaa røde granater spættede lerglimmerskifere. Strøgetningen er efter denne linje temmelig regelmæssig nord-sydlig, faldretningen er i strøgene nærmest om Refsbotn svagt østlig, men bliver længere østover opad højdedragene stejlere og kan paa sine steder her nærme sig vertikalplanet. Den anden profillinje er lagt noget sydligere fra bunden af Rippefjorden tværtover halvøen til Oldervand, — lige i nærheden af Porsanger. Nærmest Rippefjorden daunes lagrækkerne af en sandstenartet skifer. Denne er tildels rigt indblandet med glimmerskjel og danner som et overgangsled mellem sandstensartet kvartsit og glimmerskifer. Længere frem efter profillinjen veksler sandstenen med lag af glindsende glimmerskifer og indeslutter tillige lag af ren kvarts. I strøgene om Oldervand og ned mod Porsanger bliver bergarten mere glimmerrig og er her nærmest at betegne som en glimmerskifer, der dog petrografisk synes at staa lerglimmerskiferen temmelig nær. Den milde bukledede lerglimmerskifer, der i profilet fra Refsbotn optræder i veksling med de kvartsitiske skifere, gjenfindes ikke her. Ligesom de petrografiske forholde saaledes efter de to her nævnte profillinjer ikke ganske falde sammen, saa gjør der sig ogsaa nogen forskjel gjældende med hensyn til lagstillingen. Medens denne efter profilet fra Refsbotn som nys nævnt tildels viser sig stærkt presset, er derimod en paa det nærmeste horizontal lagstilling helt forherskende langs efter profilet fra Rippefjorden østover. Ligesom de her paapegede afvigelser ved siden af den geologiske ensartethed forøvrigt ingenlunde ere at betegne som

væsentlige, synes de orografiske bygningsforhold at pege hen paa at strøgene efter begge profillinjer ogsaa i geologisk henseende maa ligge ind under en og samme gruppe.

En tredje profillinje er lagt fra bunden af den søndenfor — udenfor kartets grændser liggende fjord Lerbotn — og ogsaa her bygges fjeldgrunden af mægtige lagrækker af kvart-sitiske skifere i svævende til horizontal lagstilling. At disse lagrækker maa være at henhøre til den her omhandlede Porsanger gruppe, er der al sandsynlighed for.

Ved Porsangernes — halvøens nordlige hjørne — fandt Leop. v. Buch fjeldgrunden bygget af lagrækker af en ren hvid tyndlaget kvarts i veksling med en granatrig glimmer-skifer, der skjød sig frem under en temmelig stejl nordvest-lig faldvinkel. Ifald ogsaa disse lagrækker skulde tilhøre Porsangergruppen — hvad der paa forhaand vistnok kan være at forudsætte — saa breder gruppen sig altsaa frem til Porsangerhalvøens nordostlige hjørne. Men desforuden vil den i saa tilfælde ogsaa findes optrædende som et udbredt bygningsled over de to østenfor liggende halvøer, der skyde sig frem mellem Porsanger og Laxefjord samt mellem Laxefjord og Tana. Bygningsforholdene her ere nemlig i henhold til Keilhaus optegnelser i Gæa<sup>1)</sup> i det væsentlige overensstemmende med de, der træde frem over Porsangerneset.

Med hensyn til gruppens aldersforhold, saa maa den utvivlsomt være yngre end Dividalsgruppen. Ligeferme vidnesbyrd herfor foreligger vistnok ikke. Umiddelbart kontraktforhold har nemlig ikke været at paavise efter de her omhandlede profillinjer. Lejningsforholdene, saaledes som de ere fremlagte i ridsene fig. 4 og fig. 5, synes dog med megen bestemthed at skulle pege i den retning.

Forøvrigt foreligger der for tiden intet, der kan tjene til en nærmere fastsættelse af gruppens relative aldersforhold.

<sup>1)</sup> 2 Bd. pag. 256 ff.

De bygningsgrupper, der noget sydligere træder fra yngre end Dividalsgruppen, nemlig Balsfjordgruppen og Tromsø glimmerskifergruppe, mangle her, og der er saaledes ikke anledning til mere umiddelbart at drage slutninger om Porsangergruppens relative aldersforhold ligeoverfor disse. Der er maaske ogsaa liden grund til at forudsætte, at Porsangergruppen skulde kunne lade sig parallelisere med eller lade sig indordne under en af disse grupper. Medens disse saaledes ere rige paa indlejninger af kalksten, er Porsangergruppen derimod, efter hvad der hidtil er iagttaget, ganske fri for saadanne. Da Balsfjordgruppen og Tromsø glimmerskifergruppe i den geologiske bygningsrække umiddelbart følge paa hinanden, maa Porsangergruppen antagelig enten være ældre end Balsfjordgruppen og altsaa i følgerække være at opstille mellem denne og Dividalsgruppen, eller ogsaa maa den være yngre end glimmerskifergruppen. Maaske kan Porsangergruppen nærmest være at sammenstille med en inden grændsestrøgene mellem Salten og svensk Lapland vidt udbredt skiferformation, der dannes af mægtige oftest horizontalt liggende lagrækker af glimmerskifer og sandstenartet kvartsit. Denne formation, der saavidt hidtil iagttaget er fri for kalkstensindlejninger, sees hyppig under skarpt tegnede grændselinjer at ligge over Saltens hvidlige gneis-granit, der efter kjøldragets vestlige afhæng skyder op til en højde af opimod 150 a 200'. At søge dette spørgsmaal nærmere besvaret maa være forbeholdt fremtidige undersøgelser.

#### IV. Kvartærtidens dannelser.

Med hensyn til spor fra den egentlige glacialtid, saa har der ikke været anledning til at paavise saadanne indenfor grændserne af det til afhandlingen knyttede kart. Dels har opmærksomheden under befaringen her ikke mere særlig været rettet mod dette punkt og dels kan der ogsaa være nogen

sandsynlighed for, at der efter de her omhandlede strøg i virkeligheden kun vil være at paavise faa spor efter glacialtiden. Landet er jo i det hele temmelig lavt og højeie fjeldpartier skyde kun sparsomt frem. Efter halvøens indre strøg træder den faste fjeldgrund kun sjældent frem, og denne dannes dertil i regelen af skifere, der paa grund af de petrografiske forhold kun lidet egner sig for bevarelsen af tidligere afsatte skuringsstriber. Saadanne har saaledes ikke her været at paavise. Heller ikke er gamle morænevolde iagttaget nogensteds her.

Derimod har ret udprægede skuringsstriber været iagttaget paa et par steder i strøgene om den ovenfor omhandlede — udenfor kartets grændser liggende — fjord Lerbotn, saaledes over højfjeldspartiet indenfor handelsstedet Jupvik samt i fjeldpartiet indenfor Lerbotn vand, paa begge steder i de til Dividualsgruppen henførte grønne skifere. Ved Lerbotn vand saaes de i en højde over havfladen af opimod 500' (157 m.).

Der er forøvrigt ikke gjort nogen aflæsning, der med mere bestemtbed kunde synes at pege hen paa, at fjord- og daldannelsen inden disse strøg efter nogensomhelst væsentlig maalestok skulde være at henhøre til glacialtidens erosionsvirksomhed. Tvertimod synes de orografiske bygningsforhold i det hele og store snarere at skulle vidne mod berettigelsen af en saadan forudsætning. Særlig for Rippefjordens vedkommende synes der i ethvert tilfælde at maatte være al grund til at afvise en saadan forudsætning, idet denne fjord som tidligere fremholdt nærmest kan være at opfatte som en dislokationsspalte.

Terrassedannelser — byggede af løst materiale — optræder ved bunden af Refsbotn i to paa hinauden følgende trin. Den øverstliggende spænder sig med stødtrinets øvre kant i en højde af omkring 100' (31 m.) i lange strækninger rundt de indre dele af fjorden, medens den lavere liggende



i en højde af omkring 26' (8 m.) optræder mere underordnet og i kortere brudstykker.

Skjællag cre paaviste paa Maasøen op til en højde af omkring 12' (3,8 m.) over den nuværende havstand. Maasøens ejde, der som før nævnt naa en højde af omkring 21' (6,6 m.), er bygget af fin sand, sparsomt indblandet med skjælrester. De skjæl, der her findes i skjællagene og i ejdets sandlag, tilhøre samtlige her endnu levende molluskarter. Det tidsrum, der er medgaaet fra afsætningen af disse skjæl- og sandlag ned til vor tid, synes navnlig for havtemperaturens vedkommende ikke at være mærket ved nogen mere væsentlig forandring i klimatologisk henseende.

Ved Østerbotn — en forgrening fra Kulfjorden — fandtes lignende skjællag ogsaa her til en højde af omkring 12' (3,8 m.) over den nuværende havstand. Da skjællagene ved Grundfjord paa Seilands nordende naa den samme højde, og der fortiden inden de nordligst liggende strøg af Norge ingensteds er paavist højere liggende skjælbanker, kan der være grund til at forudsætte, at dette tal betegner grænsen for den højde over havfladen, hvortil skjælbankerne her skyde op. Efter de hidtil i denne retning gjorte aflæsninger i strøget fra Saltenfjord nordover til Maasø synes der at kunne drages den slutning, at skjælbankerne stadig sænker sig mer og mer ned mod havfladen i retning fra syd mod nord efter strøget fra Salten (Bodø) til Maasø.

Opskyttet pimpsten er at paavise paa flere steder, saaledes over sandmoerne om bunden af Refsbotn.

Ved Jupvikvaag — i nærheden af handelsstedet Jupvik ved Lerbotn — er opskyttet pimpsten i henhold til opgave af distriktslæge Follum og bestemt ved nivellement at paavise indtil en højde af 78' (24 m.) over havfladen. Pimpstenen fandtes her i et sammenhængende lag af omkring 3 tommers mægtighed indenfor et skarpt begrændset omraade mellem den egentlige fjeldfod og en foran liggende lav bjergkol,

maaske en tidligere strandvold. Pimpstensbrudstykkerne fandtes tættest samlede ved og opefter denne lave strandvold. Pimpstenen laa her overalt dækket af et tyndt lag af mose-torv. Gravninger bleve her foretagne paa forskjellige steder inden højere liggende niveauer, uden at det dog lykkedes her nogensteds at træffe paa opskyllet pimpsten.

Paa en anden et par tusinde fod derfra liggende lokalitet ovenfor husebygningerne paa handelstedet Jupvik fandtes ligeledes i en højde, der efter skjøn ansattes til 70 a 80' (22 a 25 m.) o. h., ligeledes brudstykker af opskyllet pimpsten ogsaa her efter en langstrakt vold (gammel strandvold).

Da opskyllet pimpsten ligeledes ved bunden af Alten ovenfor handelsstedet Bosekop er paavist til en paa det nær meste hermed samstemmende højde, synes det hernævnte grændsetal af omkring 80' (27 m.) at skulle betegne den højde, hvortil opskyllet pimpsten vil være at paavise efter de nordligste strøg af Norge.

I nærheden af Bodø har jeg efter vandledningslinjen fundet opskyllet pimpsten indtil en højde over havfladen af 150' (47 m.). For pimpstensforekomsten synes saaledes en lignende regel at gjøre sig gjældende, som ovenfor paavist for skjælbankernes optræden, den nemlig, at højden over den nuværende havstand for dens optræden efter det nordlige Norge i strøget fra Bodø nordover er stadig aftagende.

Til hvad der saaledes her antydningvis er fremholdt skal føjes, at det vistnok i flere retninger vilde være af interesse, om disse forhold kunde blive gjorte til gjenstand for mere omfattende undersøgelser. Med hensyn til Maas-øens fornævnte af sand byggede ejde udtaler Leop. v. Buch, der i aarhundredets begyndelse besøgte disse strøg, sig blandt andet saaledes:<sup>1)</sup> »Det er helt paafaldende, hvorledes bølgeslagsstriberne (die Anschwemmungsstreifen) langs efter den

<sup>1)</sup> »Reise durch Norwegen und Lappland. 2 Th. pag. 65. Berlin 1810.

ene side af ejdet skyde sig opover ligeløbende med bugtens bøjninger, og dækkede med smaa muslinger og stene, som om, de opskyllede bølger netop og alene for en kort stund skulde have forladt denne fjære. Dog ved traditionen intet om at havbølgen nogensinde er gaaet over ejdet eller den er naaet op endog blot til sammes halve højde. Dette er dokumenter, som forbinde de store geologiske fænomener med jordens nyere historie, men hvortil der endnu udfordres andre erfaringsrækker, for at de tilfulde skulde kunne forklares.

Disse Leop. v. Buchs bemærkninger støtte sig til hans bekjendte forudsætning om en uforanderlig havstand, og det skal ogsaa medgives, at forholdet under denne forudsætning vil være gaadefuldt.

Anderledes synes sagen i saa henseende at kunne stille sig nu, da forudsætningen om en gennem kvartærtiden uforanderlig havstand mer og mer synes at tabe det sikre fodfæste, hvorpaa den i den almindelige opfatning har hvilet indtil de senere aar.

Vi tro derfor at burde fæste os lidt nærmere ved de her omhandlede bølgeslagslinjer eller bølgestriber paa Maas-ø.

Den der har havt anledning til at vanke om langs de nuværende af grus og sand byggede stranddannelser, vil have bemærket forskellige stærkere eller svagere udprægede paa hinanden følgende baand, striber eller render, der skyde frem ligeløbende med vandkanten. Saadanne render og baandstriber dannes i vandlinjen ved opskylling under et noget stærkere bølgeslag, idet grovere sand, smaasten og skjælrester stues op i smalere og bredere snore og derunder tildels kastes op lidt over vandlinjen. Samtidig føres det finere flommateriale eller den finere sand afsted med det tilbagekastede bølgeslag, og afsættes indefter de lavere liggende niveauer. Den højst liggende af disse render eller smaavolde vil saaledes i regelen svare til den højeste vandstandslinje (under springtid) og tildels ogsaa skyde lidt op over denne. Den mærker saaledes

ikke alene en tidligere vandstandslinje, men angiver, at et forholdsvis stærkt bølgeslag har raadet under sammes optræden. Da havvandet under den daglige stigen og falden mellem flo og fjære stiger eller falder jævnt og regelmæssigt, skulde — under forudsætning at forholdene ogsaa forøvrigt være helt jævne og regelmæssige — resultatet heraf være ikke en enkelt eller flere paa hinanden følgende bølgeslagslinjer, men derimod et lag af opstuvningsmateriale, der i sammenhæng bredte sig nedover fra den øverste bølgeslagslinje.

Bølgeslagslinjerne ere nemlig væsentligt betingede af bølgeslaget, og døgnets stærkeste bølgeslag træder i regelen frem netop under højtvannde. Ligesom den øverste bølgeslagslinje er dannet under en af de højeste vandstandslinjer, hvortil havfladen er naaet op under sine periodiske vekslinger, saa er ogsaa de følgende bølgeslagslinjer dannede hver under en til sammes højdeniveau svarende højt vandslinje. Da højt vandslinjen, naar den s. e. engang har naaet sit maximum, dagligen synker indtil sit minimum, saa vil hver af de følgende bølgeslagslinjer ligge i hver af de følgende dages højt vandslinjer, under forudsætning af, at hver af disse afsatte sin bølgeslagslinje. Der er vistnok intet til hinder for at bølgeslagslinjerne ogsaa kunne afsættes i andre niveauer end just netop efter højt vandslinjerne, men da bølgeslaget som nævnt her i regelen er stærkest, er der vel ogsaa al grund til at forudsætte, at i ethvert tilfælde flerheden af saadanne paa hinanden følgende bølgeslagslinjer netop ere dannede i havstandens vekslende højdeniveauer. Afstanden mellem hver enkelt af saadanne til samme sæt hørende bølgeslagslinjer vil efter omstændighederne kunne variere mer eller mindre. Det vil nemlig være afhængigt af bølgeslagets styrke, hvorvidt hver dags højt vandslinje vil kunne afsætte sin bølgeslagslinje eller ikke. Antallet af samtidig optrædende bølgeslagslinjer vil saaledes i regelen ikke overstige 6 eller 7, ofte vil det ikke engang naa saa højt. Af disse er den øverstlig-

gende den stærkest udprægede. Hver af de følgende træde svagere og svagere frem, eftersom de ligge lavere og lavere i følgerækken. Den laveste bølgeslagslinje vil være at søge omkring midlere vandstandslinje.

Af bølgeslagslinjerne vil den øverste eller i sine tilfælde de par øverste kunne vedligeholdes i det væsentlige uforandrede gennem lange tidsrum, medens de lavere liggende ere underkastede stadige forandringer, og det i en altid voksende maalestok, jo lavere de ligge. Under havstandens daglige stigen og falden ville disse nemlig være udsatte for udvaskning. Medens den højest liggende eller efter omstændighederne de par højeste bølgeslagslinjer, der er dannet under springtid eller usædvanlig høj vandstand, kun efter længere mellemrum vil blive berørt af udvaskninger og dette i saa tilfælde alene for de deles vedkommende, der skyde længst ned, idet de højere liggende dele af samme under et stærkt bølgeslag delvis er stuert adskilligt op over højeste vandstand, stiller forholdet sig i saa henseende helt forskjelligt for de lavere liggende bølgeslagslinjer. Disse sidste ville nemlig under højt vandslinjernes periodiske omløb til sine tider — hyppigere eller sjeldnere i forhold til højdeniveauet — komme til at ligge helt under havfladen og saaledes være udsatte for en sig stadig gjentagende stærk udvaskningsproces, hvorunder de snart igjen ville blive helt udslettede. Disse linjer have saaledes liden bestandighed, — dennelse og udvisning følge her paa hinanden i stadigt skifte. For nærmere at søge dette forhold klargjort har jeg paa et par steder langs vore nuværende stranddannelser med et par maaneders mellemrum undersøgt og maalt afstanden mellem de forskjellige samtidig optrædende bølgeslagslinjer og deri fra den ene gang til den anden fundet betydelige forandringer st være indtraadt for samtlige linjers vedkommende med undtagelse af den øverste.

Naar flere saadanne paa hinanden følgende gamle bølge-

slagslinjer træde frem over den nuværende havstand, saa betegner enhver af disse en linje, der i sin tid har ligget som den højest liggende bølgeslagslinje, idet den som saadan delvis har været stuet op over sin tids højeste vandstand. At et helt sæt yaa hinanden følgende linjer samtidig skulle være skudt op over havfladen, derfor er der vistnok liden rimelighed. De lavere liggende ere ogsaa i regelen saa lidet udprægede, at de, om de vare løftede op over havfladen, her vistnok ikke vilde kunne træde bestemtere frem. Af forholdene, saaledes som de træde frem ved Skatøren paa Tromsøen, synes det ogsaa med bestemthed at skulle fremgaa, at disse gamle bølgeslagslinjer ere løftede op over havfladen den ene efter den anden, én for én, og derimod ikke flere samtidig. Hver enkelt af disse er nemlig udpræget i overensstemmelse med den øverstliggende og vil saaledes ikke være at sammenstille med de lavere liggende mest som baandstriber udprægede linjesystemer.

At disse linjer saaledes den ene efter den anden ere stegne frem over havfladen maa naturligvis være at henføre enten til fjeldgrundens stigning eller til havfladens sænkning.

I og for sig vilde der vistnok intet være til hinder for, at bølgeslagslinjerne saaledes som her paavist kunde løftes op over havfladen under en stigning af den faste fjeldgrund, under forudsætning af at denne foregik jevnt og ensartet. Saaledes som forholdene imidlertid i saa henseende træde frem efter det nordlige Norge vil der dog kun være liden grund til nærmere at kunne fæste sig herved. Efter de hidtil gjorte aflæsninger, der omfatte strøgene fra Salten (Bodø) nordover til Nordkap, synes det nemlig paa det bestemteste at maatte fremgaa, at de her gennem den postglaciale tid indtraadte niveauforandringer i det indbyrdes forhold mellem den faste fjeldgrund og havstanden ere at henføre til saa jevne og ensartede forandringer efter vidstrakte omraader, at

de ingenlunde synes at kunne lade sig indpasse i en forudsætning om, at niveauforandringerne ere at tilskrive den faste fjeldgrund. Som bekjendt findes der nemlig i stort antal udspændt efter det nordlige Norges fjorde og sunde horisontalt liggende af løst materiale byggede terrassedannelser ligesom ogsaa i fast berg udgravede strandlinjer. Flere af disse — og navnlig gjælder det de i fast berg udgravede strandlinjer — ere endvidere, skjønt indbyrdes adskilte ved brede fjorde og sunde, dog at gjenkjende som brudstykker af et enkelt linjesystem, der saaledes kan være at følge efter vidt udstrakte strøg. En stigning af den faste fjeldgrund, — hvad enten denne tænkes rykkevis eller jevn — der skulde have arbejdet saa ensartet gennem en længde af opimod 100 norske mil, er vistnok i sig selv saa lidet sandsynlig, at den utvivlsomt paa det bestemtteste bør afvises, med mindre derfor maatte foreligge sikre og afgjørende vidnesbyrd. Men saadanne foreligge i ethvert tilfælde ikke for tiden.

Derimod vil der allerede paa forhaand nærmest være grund til at henføre mærker efter saa jevne niveauforandringer, der ere at følge efter vide saammenhængende kyststrøg, til havfladens niveauforandringer. At stigningsforholdene paa Maasø med de til samme knyttede bølgeslagslinjer paa en naturlig og ligefrem maade lade sig forklare under en forudsætning om en synkende havstand, vil vel ogsaa ligge klart for en dag.

Maasø er forøvrigt som allerede ovenfor nævnt ikke det eneste punkt langs efter det nordlige Norge, hvor der er iagttaget saadanne bølgeslagslinjer eller andre dermed tilsvarende dannelser. Saadanne optræde tvertimod paa flere steder. Særlig skal der i saa henseende nævnes den række af paa hinanden følgende bølgeslagslinjer, der indtil en højde af 9 m. over havfladen er paavist opover det brede af alluvialmasser byggede underland Skatøren ved Tromsøens nord-

lige ende. Disse, der tidligere have været omhandlede<sup>1)</sup>, pege med hensyn til oprindelse ganske i samme retning som bølgeslagslinjerne paa Maasø.

I henhold til hvad her er paavist, antages der saaledes at kunne drages den slutning for det nordlige Norges vedkommende, at havstanden gennem de senere afsnit af den postglaciale tid har ligget ind under en stadig synken — hvad enten denne derunder nu har været jevn eller knyttet til periodiske oscillationer. At forholdene her kunne lade sig indordne under hver enkelt af de sidstnævnte to forudsætninger, vil antagelig være klart.

Tromsø den 24de Juli 1884.

---

<sup>1)</sup> Continentale massers langsomme seculære stigning eller sænkning. Tr. Mus, Aarsh. I 1878. Ligeledes aftrykt i Geol. Magaz. under titel »Slow secular rise and fall af Continental masses 1879, pag. 298 ff.



## Om størrelsesbegreberne areal og volum.

Af

AXEL THUE.

---

Er  $nm$  et stykke af en ret linie, da kan dette lægges om saaledes, at  $n$  og  $m$  bytter plads. Men heraf følger umiddelbart, at naar en række rette linier afsættes efter hinanden langs en ret linie, da bliver stykket af den rette linie, der repræsenterer summen af de afsatte stykker, uafhængig af disses orden.

En ret linie kan følgelig efter dette siges at have en størrelse, idet man altsaa ved at opstykke den i vilkaarlige dele og atter føie disse sammen paa en hvilkensomhelst maade kun faar igjen den oprindelige linie.

Hvad her er sagt om den rette linie, kan ogsaa siges om vinkelen, da denne ogsaa kan lægges saaledes om, at benene bytter plads.

Vi vil nu føre et Euklid-geometrisk bevis for, at begreberne areal og volum er størrelsesbegreber, og at man saaledes kan tale om ligestore arealer og volumer, der ikke er kongruente.

Vort bevis gaar følgelig ud paa at godtgjøre, at man ikke ved at opstykke et areal eller volum i forskjellige dele og derpaa sammenføie disse paa en eller anden ny maade kan faa frem et areal eller volum, hvis omkreds eller over-

---

flade kan bringes til at ligge helt udenfor det oprindelige areals eller volums.

Det er ikke vanskeligt ved det Euklidiske postulatums hjælp, at bevise den sætning, at naar et hvilketsomhelst plant areal overskjæres med en række parallelle rette linier med samme afstand, da vil summen af de paa disse afskaarne stykker kun variere om en endelig størrelse, naar linesystemet bevæges paa en hvilken som helst maade, uanseet stykkernes antal, eller hvad der bliver det samme, deres afstands størrelse.

Af denne hjælpesætning, som vi senere skal bevise, følger nu vor sats for arealets vedkommende direkte.

Thi opstykker vi nemlig et areal paa en hvilken som helst maade og af delene sammensætter et nyt, da vil ifølge ovenstaaende summen af de stykker, som dette areal afskjærer af vore parallelle linier kun variere om en endelig størrelse fra summen af de stykker, som vort oprindelige areal vilde afskjære af det samme system, uanseet hvor fin inddelingen eller hvor stort stykkernes antal var gjort.

Men kunde nu det sidste areals omkreds bringes til at falde helt udenom det førstes, og man saa overskar den samlede figur med det samme system parallelle rette linier, da vilde man altsaa have, at summen af stykkerne mellem de to omkredse ikke kunde overskride en vis endelig grændse, hvor tæt end parallelterne var trukne. Heraf indser man nu, at der ikke kan eksistere noget areal mellem de to omkredse.

Idet vi nu altsaa kan tale om størrelsen af en sum af arealer, kan man herved igjen bevise, at begrebet volum er et størrelsesbegreb. Vi forudsætter blot i lighed med, hvad vi gjorde for arealets vedkommende, den sætning, at summen af de arealer, som et volum afskjærer af en række parallelle planer med samme afstand, kun varierer om et endeligt areal, naar systemet af planer bevæges, uanseet om planernes afstand er nok saa liden. Heraf sluttes da paa samme maade, som for

arealets vedkommende, at begrebet volum er et størrelsesbegreb.

Vi vil derpaa bevise vor hjælpesætning og specielt tænke os det plane areal at være et triangel.

Vi forudsætter først, at en af de parallelle overskjæringslinier under systemets bevægelse stedse gaar gjennem et hjørne  $A$ , dens længde være  $u$ . Fra hjørnerne  $B$  og  $C$  drages perpendikulærene  $p_1$  og  $p_2$  ned paa  $u$ .

Man har da, naar man af de øvrige parallelle overskjæringslinier kalder de, der overskjærer siden  $b$ ,  $V_1 V_2 \dots V_n$  og de, der overskjærer  $c$ ,  $W_1 W_2 \dots W_m$ :

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} &< \frac{V_1}{u} < \frac{n}{n+1} \\ \frac{n-2}{n} &< \frac{V_2}{u} < \frac{n-1}{n+1} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{n-n}{n} &< \frac{V_n}{u} < \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Heraf faaes nu ved addition:

$$\frac{1+2+\dots+(n-1)}{n} < \frac{V_1+V_2+\dots+V_n}{u} < \frac{1+2+3+\dots+n}{n+1}$$

eller

$$\frac{n-1}{2} < \frac{V_1+V_2+\dots+V_n}{u} < \frac{n}{2}$$

Paa samme maade faaes:

$$\frac{m-1}{2} < \frac{W_1+W_2+\dots+W_m}{u} < \frac{m}{2}$$

Ved addition faar man nu:

$$\frac{n+m}{2} - 1 < \frac{V_1+\dots+V_n+W_1+\dots+W_m}{u} < \frac{n+m}{2}$$

Betegner vi med  $S$  summen  $V_1 + \dots + V_n + W_1 + \dots + W_m + u$  saa antager denne ligning formen:

$$(I) \quad \frac{n+m}{2} \cdot u < S < \frac{n+m+2}{2} \cdot u$$

Forstaar vi nu ved  $h$  triangelhøiden paa siden  $a$  og ved  $\alpha$  og  $\beta$  de dele, hvori denne deles ved  $u$ ; da haves:

$$\frac{u}{h} = \frac{\alpha}{p_1} = \frac{\beta}{p_2} = \frac{\alpha + \beta}{p_1 + p_2} = \frac{a}{p_1 + p_2}$$

eller

$$p_1 + p_2 = \frac{ah}{u}$$

Men nu er, naar parallelernes afstand kaldes  $x$ :

$$\begin{aligned} nx &< p_1 < (n+1)x \\ mx &< p_2 < (m+1)x \end{aligned}$$

eller:

$$(n+m)x < p_2 + p_1 < (n+m+2)x$$

Ved indsætning af  $p_2 + p_1$  faaes nu:

$$(n+m)x < \frac{ah}{u} < (n+m+2)x$$

eller:

$$(II) \quad \frac{n+m}{2} \cdot u < \frac{ah}{2x} < \frac{n+m+2}{2} \cdot u$$

Af ligningerne (I) og (II) ser man nu, at summen  $S$  kun kan variere om en størrelse  $u$  fra det konstante udtryk  $\frac{ah}{2x}$ , og da  $u$  stedse maa være mindre end en af triangelts sider, saa er herved beviset ført under den givne forudsætning.

Dersom nu ikke nogen af de parallel linier gaar gennem et hjørne  $A$ , vil vi parallelforskyve systemet, saa at dette bliver tilfælde og derunder undersøge, hvorledes  $S$  varierer.

Er  $V_1$  og  $W_1$  to paa hinanden følgende paralleler mellem hvilke et hjørne  $A$  befinder sig og er  $u$  en med systemet parallel linie gennem  $A$ , skjærende triangelsiden  $a$ , da deler denne systemet i to andre. Flyttes nu disse hver for sig, saa at baade  $V_1$  og  $W_1$  faar en afstand  $x$  fra  $u$ , saa sees at summen af stykkerne i hvert af de to systemer kun bliver formindsket med en størrelse, der er mindre end  $u$ .

Flyttes nu atter det ene af systemerne, saaledes at til eksempel  $V_1$  falder sammen med  $u$ , saa faar herved summen af stykkerne en forøgelse  $u$ .

Men den samme stilling af vore parallelle linier, som de nu efter disse flytninger har indtaget, kunde være frembragt ved blot at flytte hele det oprindelige system, saaledes at  $V_1$  faldt sammen med  $u$ . Summen af de afskaarne stykker varierer altsaa under systemets parallel forskyvning blot om en størrelse mindre end  $u$ , der, som vi før har bemærket, er mindre end en af triangelets sider.

Hermed har vi da godtgjort rigtigheden af vor paastand for triangelets vedkommende. Men gjælder den for dette, maa den ogsaa gjælde for enhver polygon, da denne jo kan opstykkedes i lutter triangler.

Ved nu at gaa til grænsen, faar vi paa vanlig vis, at vor hjælpesætning ogsaa gjælder arealer begrænsede af krumme linier samt for arealer paa krumme overflader.

Paa analog vis kan vi saa bevise hjælpesætningen for rummets vedkommende og begynde med at undersøge summen af de arealer, der fremkommer, ved at overskjære et tetraeder med parallelle planer med samme afstand. Men da gangen i beviset efter det forangaaende maa sige sig selv, kan det være nok med at have anført dette.

Vi vil saa til slutning føre et absolutgeometrisk bevis for vort theorem, hvad arealet angaar og lade dette for bekvemheds skyld erholde følgende udtale:

Naar  $n$  polygoner ved en eller anden sammenføining

danner en  $p$  kant, da kan  $n - \alpha$  af disse polygoner ikke ved nogen sammenføining danne den samme  $p$  kant.

Vi vil for Almindeligheds Skyld forudsætte, at  $p$  kantens omkreds ikke behøver at være sammenhængende, idet den saa at sige kan være fuld af huller eller have aabne polygoner i sit indre.

Vi vil (for simpelheis skyld) antage, at de  $n$  polygoner er triangler; thi gjælder satsen for disse, maa den ogsaa gjælde for alle andre polygoner, da disse jo kan deles i triangler.

Føies nu disse triangler sammen til  $p$  kanten faaes et net med  $n + u$  masker, hvor  $u$  er antallet af de aabne polygoner eller huller i  $p$  kanten.  $k_1 + k_2$  er antallet af nettets knudepunkter, som altsaa er de forrige triangelhjørner.  $k_1$  er antallet af de, der ikke falde paa nogen triangelside,  $k_2$  derimod de med hvilke dette er tilfælde.  $v$  er de af de  $k_2$  knudepunkter, der falder paa  $p$  kantens omkreds.

Af de  $k_2$  knuder forbindes nu de  $k_2 - v$  ved rette linier med deres tilsvarende triangleres hjørner, hvorved nettet erholder  $k_2 - v$  masker og grene mere. Ved en gren forstaaes forbindelseslinien mellem to knuder. Vi vil nu forbinde de  $v$  knuder paa  $p$  kantens usammehængende omkreds med hjørner paa de tilsvarende dele af denne ved rette linier. Antallet af nettets masker og grene er herved forøget med  $v$ . Det samlede maskeantal er saaledes, idet  $p$  kantens yderste omkreds regnes for en maske lig:  $n + u + k_2 + v + v + 1$  eller  $n + u + k_2 + 1$ . Antallet af knuder er fremdeles  $k_1 + k_2$ . Vi vil nu beregne antallet af nettets grene. Man tænke sig alle de masker, hvoraf nettet er dannet, taget fra hinanden.

Det samlede grene- eller sideantal er da lig  $3(n + k_2 - v) + p + 3v$  eller  $3(n + k_2) + p$ , idet man, naar de masker, som  $p$  kantens omkredse danner undtages, har  $n + k_2 - v$  triangler, hvis sideantantal bliver  $3(k_2 + n - v)$ , dertil maa nu

adderes de grene, som  $p$  kantens omkredse danne, deres antal bliver som man ser  $p + v$ , samt endelig har man fra de  $v$  knuder trukket  $v$  grene, hvilke under nettets fra hinanden tagen fordobles og bliver lig  $2v$ .

Sammensættes nu nettet igjen som før, falder gren og gren sammen, saa at altsaa antallet af nettets grene bliver halvdelen af ovenstaaende sum. Men ifølge den Eulerske formel om antallet af et polyeders sideflader, kanter og hjørner, en sætning som kun tilsyneladende er geometrisk, følger nu ligningen:

$$(n + u + k_2 + 1) + (k_1 + k_2) - \frac{1}{2}(3(n + k_2) + p) = 2$$

eller

$$2k_1 + k_2 = p + n - 2u + 2$$

Kaldes nu Summen af vinklerne i de  $n$  og  $n - \alpha$  triangler for  $S_n$  og  $S_{n-\alpha}$  og summen af vinklerne i de  $\alpha$  triangler og i  $p$  kanten for  $S_\alpha$  og  $S_p$ , da haves, idet man erindrer, at

$$S_\alpha = S_n - S_{n-\alpha} \quad \text{at:}$$

$$S_n - S_p = 4R(k_1 - p) + 2R k_2$$

eller

$$S_n - S_p = 2R(2k_1 + k_2 - 2p)$$

eller

$$S_n - S_p = 2R(n - p - 2u + 2) \quad (I)$$

Skulde nu de  $n - \alpha$  triangler kunne danne den samme  $p$  kant som de  $n$  triangler, havde man paa samme maade formelen:

$$S_{n-\alpha} - S_p = 2R(n - \alpha - p - 2u + 2) \quad (II)$$

Ved nu at subtrahere ligning (II) fra (I) faaes:

$$S_n - S_{n-\alpha} = 2R\alpha$$

eller

$$S_\alpha = 2R\alpha. \quad (III)$$

Da nu som bekjendt i den absolute geometri summen af vinklerne i et triangel ikke er større end  $2R$ , saa følger af

ovenstaaende ligning (*III*), at summen af vinklerne i hver af de  $\alpha$  triangler er lig  $2R$ . Men heraf følger igjen rigtigheden af det Euklidiske postulat, hvoraf man, som før er vist, kommer til vort theorems nødvendighed.

Da man vilde have kommet til denne ligning (*III*), uanseet om man havde betragtet plane eller sfæriske triangler, saa er herved med det samme godtgjort rigtigheden af vor paastand for kuglearealets vedkommende.

Som man ser, har dette absolute bevis en ganske særegen form. For nemlig at bevise en sætnings rigtighed, opstilles en anden sætning (det Euklidiske postulat), der altsaa enten er rigtig eller urigtig. Hvis denne er rigtig, saa følger heraf, den første sætnings rigtighed, og hvis den er urigtig, saa følger ogsaa heraf, at den første sætning er rigtig, thi i modsat fald maatte den anden være rigtig.

---



# Kongsbergs Sølvværks Drift før og nu

af

AMUND HELLAND.

*Deichman* angiver i sine »Historiske Efterretninger om Sølv-Verket Kongsberg« (kongelige Videnskabers Selskabs Skrifter 11te Del 1777) den samlede Sølvproduktion paa Kongsberg, fra Sølvet blev fundet i 1623 indtil 1772, saaledes:

|                  |           |      |    |      |
|------------------|-----------|------|----|------|
| Fint Sølv . . .  | 1,771,766 | Mark | 14 | Lod  |
| Haandstene . . . | 5,291     | „    | 9  | „    |
| tilsammen . . .  | 1,777,058 | Mark | 7  | Lod. |

*Thaarup* angiver i »Versuch einer Statistik der Dänischen Monarchie« følgende Produktion fra 1623 til 1792:

|                  |           |      |    |      |
|------------------|-----------|------|----|------|
| Fint Sølv . . .  | 2,211,770 | Mark | 9  | Lod  |
| Haandstene . . . | 5,672     | „    | 15 | „    |
| tilsammen . . .  | 2,217,443 | Mark | 8  | Lod. |

I *Krafts* Topografisk-statistiske Beskrivelse over Norge sættes Produktionen fra Værkets Begyndelse 1624 til dets Nedlæggelse i 1805 til

2,360,144 Mark 5 Lod.

Kommissionen af 1833 opgiver følgende Produktion:

|                     |           |           |
|---------------------|-----------|-----------|
| 1624—1805 . . .     | 2,360,140 | Mark Sølv |
| 1805—1815 . . .     | 38,012    |           |
| 1816—1834 incl. . . | 114,374   |           |
| tilsammen . . .     | 2,512,526 | Mark      |

Sølvværksdirektør *C. F. Andresen* angiver (i Magazin for Bergmandsefterretninger Mai 1879) følgende Tal:

|               |           |      |
|---------------|-----------|------|
| 1624—1805 . . | 2,360,140 | Mark |
| 1805—1815 . . | 38,112    |      |
| 1816—1878 . . | 1,044,249 |      |

tilsammen . . 3,442,501 Mark fint Sølv.

Bfter Beretningerne om Kongsberg Sølvværks Drift har Produktionen fra 1879 til 1ste Juli 1884 udgjort

Mark fint Sølv: 120,116.

Altsaa tilsammen fra 1816 til 1ste Juli 1884:

Mark fint Sølv: 1,164,365.

Hvis man uden Hensyn til Sølvets vaxlende Kurs efter gammel Taxt sætter 1 Mark Sølv til  $9\frac{1}{4}$  Spd. eller til 37 Kroner, saa faar vi følgende Bruttoværdier for Kongsberg Sølvværks Produktion i de tre Perioder, fra Værkets Opdagelse 1623 til dets Nedlæggelse i 1805, fra denne Tid og til dets Optagelse af den norske Stat i 1815, og ifra denne Tid til 1884:

|                              |           |        |            |     |
|------------------------------|-----------|--------|------------|-----|
| 1624—1805 . .                | 2,360,140 | Mark = | 87,325,180 | Kr. |
| 1805—1815 . .                | 38,112    | „ =    | 1,410,144  | „   |
| 1816— $\frac{1}{7}$ 1884 . . | 1,164,365 | „ =    | 43,081,505 | „   |

tilsammen . . 3,562,617 Mark = 131,816,829 Kr.

Med et rundt Tal skulde altsaa 132 Milloner Kroner representere Bruttoudbyttet af Kongsberg Sølvværk fra 1623 — $\frac{1}{7}$  1884.

Som vi senere skal se, er der fra 1624 til 1805 anvendt mere end 87 Millioner til Sølvværkets Drift; Driften fra 1816 til 84 har derimod givet et betydeligt Overskud, nemlig 20 til 21 Millioner Kr.

Til de ovenstaaende Tal skulde der, hvis man vilde have en Oversigt over den samlede Produktion fra det hele Kongsbergske Felt, lægges de Sølvængder, som er vundet ved den private Drift siden 1858. Dette er imidlertid ikke store

Kvanta. Fra Vinoren er efter Direktør Andresen vundet 1858—1878

9,170 Mark 12 Lod.

Fra Anna Sofie Sølvværk er solgt og tilgodegjort ved Kongsberg Hytte 1861—66 129 Mark og fra Skara Gruberne 22 Mark.

— I nedenstaaende Tabeller er forsøgt opgjort Lister over Sølvværkets Produktion aarligt fra 1623—1884, og følgende Kilder er her benyttet: I »Historiske Efterretninger om Sølv-Verket Kongsberg« af *Deichman* i »kongelige Videnskabers Selskabs Skrifter« findes en Produktionsliste over Sølv fra 1623 til 1772, hvilken her er hidsat, idet Lod er udeladt. I »Stykker af de norske Bergværkers Historie efter ældre Kilder« (af Prætorius) i Magazin for Bergsmandsefterretninger (No. 23 1877) findes en lignende Fortegnelse fra 6te Maaned 1686 til 1767, der stemmer nogenlunde med Deichmans Tal. I *Thaarups* »Versuch einer Statistik der Dänischen Monarchie« findes en Tabel fra 1623 til 1792, hvilken stemmer fuldstændig med Deichmans. I Kraft »Topografisk-statistiske Beskrivelse over Norge« Bind 2, er Produktionslisten fra 1781 til 1805 fuldført. I nedenstaaende Liste er Deichmans Tal benyttet fra 1623 til 1772, Thaarups fra 1773 til 1792, Krafts fra 1792 til 1805, idet dog Vægten af Sølv i Haandstene udeladt. Fra 1816 til 1878 er Direktør C. F. Andresens Lister benyttede, og for de sidste Aars Vedkommende er Sølvværksdirektionens Beretninger. Produktionen er i disse Aar sat i Kilogram, men for Oversigtens Skyld er Tallene omgjort til Mark.

| Aar. | Fint Solv<br>Mark. | Aar. | Fint Solv<br>Merk. | Aar. | Fint Solv<br>Mark. | Aar. | Fint Solv<br>Mark. |
|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|
| 1623 |                    | 1666 | 6653               | 1709 | 10951              | 1752 | 24045              |
| 1624 | 1464               | 1667 | 6587               | 1710 | 10740              | 1753 | 24350              |
| 1625 |                    | 1668 | 5206               | 1711 | 15513              | 1754 | 24131              |
| 1626 | 2973               | 1669 | 5917               | 1712 | 15491              | 1755 | 23036              |
| 1627 | 2401               | 1670 | 5511               | 1713 | 12639              | 1756 | 25068              |
| 1628 | 4682               | 1671 | 7388               | 1714 | 12690              | 1757 | 28931              |
| 1629 | 5170               | 1672 | 4741               | 1715 | 9089               | 1758 | 27196              |
| 1630 | 6347               | 1673 | 3025               | 1716 | 12745              | 1759 | 27852              |
| 1631 | 5820               | 1674 | 4198               | 1717 | 21793              | 1760 | 26356              |
| 1632 | 3579               | 1675 | 3865               | 1718 | 19685              | 1761 | 27803              |
| 1633 | 3624               | 1676 | 3387               | 1719 | 14825              | 1762 | 28644              |
| 1634 | 4298               | 1677 | 2636               | 1720 | 12762              | 1763 | 29514              |
| 1635 | 5501               | 1678 | 5299               | 1721 | 13672              | 1764 | 25644              |
| 1636 | 5515               | 1679 | 7145               | 1722 | 16884              | 1765 | 31538              |
| 1637 | 6241               | 1680 | 7420               | 1723 | 16712              | 1766 | 32436              |
| 1638 | 5542               | 1681 | 6095               | 1724 | 14385              | 1767 | 30610              |
| 1639 | 5746               | 1682 | 5224               | 1725 | 11844              | 1768 | 35314              |
| 1640 | 5503               | 1683 | 3525               | 1726 | 13641              | 1769 | 30159              |
| 1641 | 5078               | 1684 | 1579               | 1727 | 11163              | 1770 | 31225              |
| 1642 | 4425               | 1685 | 4590               | 1728 | 11237              | 1771 | 28945              |
| 1643 | 4578               | 1686 | 5752               | 1729 | 8358               | 1772 | 23949              |
| 1644 | 4404               | 1687 | 5295               | 1730 | 10688              | 1773 | 26664              |
| 1645 | 5820               | 1688 | 3790               | 1731 | 8540               | 1774 | 24741              |
| 1646 | 6044               | 1689 | 3187               | 1732 | 9279               | 1775 | 19785              |
| 1647 | 7183               | 1690 | 3060               | 1733 | 17480              | 1776 | 24232              |
| 1648 | 6485               | 1691 | 3357               | 1734 | 16876              | 1777 | 20662              |
| 1649 | 7168               | 1692 | 3894               | 1735 | 14958              | 1778 | 24883              |
| 1650 | 6173               | 1693 | 5361               | 1736 | 12545              | 1779 | 25090              |
| 1651 | 5316               | 1694 | 5865               | 1737 | 12746              | 1780 | 21442              |
| 1652 | 5531               | 1695 | 6371               | 1738 | 18947              | 1781 | 23452              |
| 1653 | 5441               | 1696 | 6680               | 1739 | 15641              | 1782 | 23190              |
| 1654 | 7576               | 1697 | 8206               | 1740 | 18492              | 1783 | 23449              |
| 1655 | 7355               | 1698 | 7089               | 1741 | 24077              | 1784 | 22648              |
| 1656 | 6615               | 1699 | 6418               | 1742 | 19888              | 1785 | 25660              |
| 1657 | 6298               | 1700 | 5937               | 1743 | 19142              | 1786 | 23459              |
| 1658 | 6874               | 1701 | 7598               | 1744 | 22716              | 1787 | 21991              |
| 1659 | 5676               | 1702 | 7550               | 1745 | 24324              | 1788 | 18434              |
| 1660 | 6591               | 1703 | 5091               | 1746 | 27639              | 1789 | 16642              |
| 1661 | 8186               | 1704 | 9278               | 1747 | 29921              | 1790 | 18778              |
| 1662 | 8902               | 1705 | 8940               | 1748 | 24122              | 1791 | 18061              |
| 1663 | 9073               | 1706 | 8286               | 1749 | 19228              | 1792 | 16720              |
| 1664 | 8404               | 1707 | 9563               | 1750 | 22064              | 1793 | 19891              |
| 1665 | 7042               | 1708 | 11996              | 1751 | 23676              | 1794 | 15226              |

| Aar. | Fint Sølv<br>Mark. | Aar. | Fint Sølv<br>Mark. | Aar. | Fint Sølv<br>Mark. | Aar.  | Fint Sølv<br>Mark. |
|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|-------|--------------------|
| 1795 | 13200              | 1818 | 2303               | 1841 | 25344              | 1864  | 12984              |
| 1796 | 16212              | 1819 | 2095               | 1842 | 23304              | 1865  | 15585              |
| 1797 | 11481              | 1820 | 2349               | 1843 | 19119              | 1866  | 14641              |
| 1798 | 10111              | 1821 | 1617               | 1844 | 18459              | 1867  | 14814              |
| 1799 | 9677               | 1822 | 1431               | 1845 | 18396              | 1868  | 15786              |
| 1800 | 11473              | 1823 | 803                | 1846 | 18025              | 1869  | 15306              |
| 1801 | 12290              | 1824 | 1471               | 1847 | 18953              | 1870  | 15229              |
| 1802 | 7998               | 1825 | 1582               | 1848 | 38000              | 1871  | 14682              |
| 1803 | 6972               | 1826 | 1673               | 1849 | 22367              | 1872  | 15751              |
| 1804 | 5661               | 1827 | 1968               | 1850 | 22876              | 1873  | 15063              |
| 1805 | 8177               | 1828 | 1845               | 1851 | 22703              | 1874  | 14251              |
| 1806 |                    | 1829 | 2436               | 1852 | 18475              | 1875  | 17282              |
| 1807 |                    | 1830 | 7288               | 1853 | 17941              | 1876  | 17304              |
| 1808 |                    | 1831 | 8426               | 1854 | 27493              | 1877  | 19275              |
| 1809 |                    | 1832 | 18296              | 1855 | 34944              | 1878  | 19676              |
| 1810 | 38112              | 1833 | 39869              | 1856 | 32776              | 1879* | 3635               |
| 1811 |                    | 1834 | 24275              | 1857 | 31229              | 79—80 | 19662              |
| 1812 |                    | 1835 | 19814              | 1858 | 34060              | 80—81 | 20564              |
| 1813 |                    | 1836 | 25848              | 1859 | 20475              | 81—82 | 25138              |
| 1814 |                    | 1837 | 28848              | 1860 | 18153              | 82—83 | 24132              |
| 1815 |                    | 1838 | 20795              | 1861 | 14741              | 83—84 | 26940              |
| 1816 |                    | 1839 | 30211              | 1862 | 13051              |       |                    |
| 1817 |                    | 1840 | 32914              | 1863 | 13628              |       |                    |

Det kunde være interessant ved Benyttelsen af de i Sølvværkets Arkiv opbevarede Efterretninger at gjøre op Lister over hver enkelt Grubes Produktion, over Belæggets Størrelse osv., at beregne videre fra gammel Tid Driftsudgifter, Overskud og Tab for hvert enkelt Aar. Et sådant Arbeide vilde ei alene have historisk Interesse, men vilde sikkerligen ogsaa give mange nyttige og værdifulde Vink til en rigtig Forstaaelse af Sølvets Fordeling i Gangene og til Bedømmelsen af det hele Felts Værdi og Produktionsevne.

Til dette Arbeide er kun benyttet de ældre offentliggjorte Beretninger, dels de ovenfor nævnte Arbeider af Deichman,

\*) Produktionen 1879 — 3635 er kun for første Halvdel af dette Aar.

Thaarup, Kraft, Brünnich, Andresen, dels Kommissions Betænkninger og Beretninger om Sølvværkets Drift.

Hvis vi sammenligner Antallet af drevne Gruber, Arbeidsbelæg, Udbytte osv. før og efter 1814, saa viser det sig, at en Mark Sølv er skaffet tilveie for meget billigere Betaling i de sidste Menneskealdere end i tidligere Tid, og det uagtet Pengene havde meget større Værdi tidligere. Siden det store Fund i 1833 har Sølvværket leveret et betydeligt Overskud, medens Tilskudene var baade store og mange i ældre Tid.

Den almindelige Forklaring af dette Forhold er, saavidt jeg ved, den, at siden 1833 har et i Kongsberg Annaler exempelløs Held fulgt Bergværksdriften her. Der er fra en enkelt eller to Gruber, Kongens og Armens Gruber med et Belæg paa 400 Mand og derunder leveret Sølv mængder, ligesaa store som dem, der i forrige Aarhundrede leveredes af 40 Gruber med et Belæg paa 4000 Mand.

Et hvilket som helst Aar i Slutningen af forrige Aarhundrede sammenlignet med et hvilket som helst Aar efter 1833 vil vise dette. Exempelvis kan vi tage Aarene 1750, 1770 og 1790 og sammenligne med Aarene 1830, 1860 og 1880.

## Sammenligning mellem Driften før og nu.

|                                | 1750   | 1770   | 1790    | 1840   | 1860   | 1880—81 |
|--------------------------------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| Produktion, Mark . . . . .     | 22064  | 31225  | 18778   | 32914  | 18153  | 20564   |
| Antal Gruber i Drift . . . . . | c. 40  | c. 40  | c. 36   | 3      | 3      | 4       |
| Arbejdere . . . . .            | 2260   | 4000   | e. 2500 | e. 500 | 390    | 353     |
|                                | Rdr.   | Rdr.   | Rdr.    | Spd.   | Spd.   | Spd.    |
| Udgifter . . . . .             | 285000 | 400000 | 327000  | 290000 | 106000 | 129000  |
| Indtægter . . . . .            | 267000 | 373000 | 238000  | 92000  | 168000 | 167000  |
| Overskud . . . . .             |        |        |         | 198000 | 62000  | 38000   |
| Tab . . . . .                  | 18000  | 27000  | 89000   |        |        |         |

Disse Tal er meget mærkværdige; med et Belæg paa 2 til 4000 Mand vindes der i forrige Aarhundrede 18000 til 31000 Mark Sølv fra omkring 40 Gruber, medens man i de sidste halvhundrede Aar fra 3 til 4 Grader vinder de samme Mængder med et Belæg paa 350 til 500 Mand.

Mange Forklaringsgrunde er her tænkelige.

For det første kan som berørt eksempelløst Held have fulgt Driften i de sidste halvhundrede Aar, medens det halve Aarhundrede fra 1750 var exceptionelt uheldigt.

For det andet kan det siges, at Driften nu fortiden foregaar med større Kontrol, med forstandigere Udnyttelse af Arbeidskraften, med bedre Maskiner og med kraftigere Sprengmidler og fuldkomnere Redskaber, og at Følgen af disse Forbedringer og af den større Kyndighed er det større Udbytte.

For det tredie kunde det tænkes, at Driften fortiden foregik med stor Sparsomhed, og at man samtidig med, at man forsatte Driften paa de ædle Partier af Gangene, forsømte Forsøgsdrifterne.

Det er ikke min Hensigt her at forsøge paa en udtømmende Besvarelse af disse i Virkeligheden temmelig komplicerede Spørgsmaal; meget mere er det min Hensigt at henvende Opmærksomheden paa Tallene og at vække Interesse for Spørgsmaalene.

Det er nemlig klart, at hvis den større Kontrol, den større Kyndighed, bedre Maskiner, Stollernes Gjeennemslag, de kraftigere Sprengmidler skulde være den væsentligste Grund til det større Udbytte af Sølvværket, saa har man Grund til at tro paa en større Fremtid for Kongsberg Sølvværk, hvis nye Arbejder sættes igang; thi Feltet er som enhver ved, overmaade stort.

Sølvværket blev pludselig nedlagt i 1805, og ved denne Nedlæggelse blev tusinder af Mennesker brødløse, og Staten blev belastet med store Udgifter. Siden den Tid har der



hersket stor Frygt for, at udvide Driften paa Kongsberg, og det faste Arbeidsbelæg overskrider ikke 360 Mand. Planen for Driften er opgjort efter liden Maalestok og i en Tid, da Nationens økonomiske Evne var liden. Sølvets uregelmæssige Optræden paa Gangene har været det Damokles Sværd, som stedse har hængt truende over Kongsberg Sølvværk. Skulde det imidlertid vise sig, at Overskudet af Driften for en væsentlig Del skyldes Nutidens forbedrede Driftsmethoder, saa vilde dette være en Grund til med større Fortrøstning at tage flere Punkter paa det vidtstrakte Felt under Arbeide.

Det kunde med dette Spørgsmaal for Øie være værd at undersøge det Antal Gruber, som har været i Drift, Arbeidsbelægget, Gevinst og Tab til forskjellige Tider.

— Den endnu i Drift værende Kongens Grube er Kongsberg Sølvværks Fundgrube. Fundet synes efter Beretningen at være skeet ved et Tilfælde, idet det angives at Gjøterguttens Jakob Grosvald fra Sandsvær samt en Datter af Arne Werp fandt nogle glimrende Metalklumper, som de tog hjem med sig fra Sæteren. Christoffer Grosvald, Jakobs Fader, smeltede Sølv, og solgte det til en Guldsmed. De hentede oftere Sølv fra Stedet og solgte det for billig Pris; men da Arne Werp ikke bar sig forsigtig ad, blev han mistænkt for Tyveri; han fortalte da Sammenhængen og paaviste Sølvvaaren. Fundet skede i 1623, og ved Jubelfæsten i 1723 blev den 16de Juli 1623 anset for den Dag, Fundet blev gjort.

Statholderen Jens Juel lod Stedet undersøge sandsynligvis ved de nylig indkaldte tyske Bergmænd paa Eker og ved det sølvholdige Blyværk ved Labrofoss. De fandt en fodbred Gang indeholdende »baade gedigen haard Sølv og anden Ertz.« Foruden Christianus Qvartus eller Kongens Grube fandtes snart Herzog Friderich og Jungen Printzen Grube paa Overberget og Hertzog Ulrich paa Underberget. Kristian den 4de kom til Stedet i April 1624, og man var da

naaet til et Dyb af 7 Alen  $2\frac{1}{2}$  Kvarter og havde udlænket  $17\frac{1}{2}$  Alen. Skjærpet blev kaldet Christianus 4tus, men benævntes almindelig Kongens Grube. (Udbytte i 1624 angives til 1464 Mark gedigent Sølv og 109 Mark i Haandstene).

Sølvværket blev de første fire Aar drevet for Kongens og Kronens Regning. Fundet synes snart at have givet Anledning til Opdagelsen af nye Gange; thi Aaret 1628 skal følgende Gruber været kjendte:

- 1) Kongens Grube, som imidlertid paa den Tid var indstillet.
- 2) Armen Grube, som gav godt Udbytte.
- 3) Prindsens Grube (Herren Jungen Printzen Grube).
- 4) Herzog Friderich
- 5) Commissarien Gruben, funden 1627.
- 6) Herzog Ulrich.
- 7) Blygangen og
- 8) Braunschweig Gruben.

De fire første af disse Gruber ligger paa Overbjerget, de fire sidste paa Underbjerget. Følgelig var allerede i 1628 flere af Underbjergets Gange opdagede og tagne i Drift. Tre Aar senere i 1631 angives foruden de ovennævnte 8 Gruber tillige følgende:

- 1) Hoffnung.
- 2) Charitas (en Kisgrube).
- 3) Fortuna.
- 4) Sachsen (Haus Sachsen).
- 5) Ertz Engel Michael.
- 6) Juuls Grube.
- 7) Segen Gottes.
- 8) Dergleichen.
- 9) Qvartale Grube.

Doctor Nortmann, der bestyrede Værket fra 1628 til 1631 beretter, at i denne sidste Tid var Grubernes Antal bragt op fra 7 til 27.

I Braunschweig Grube fandt man 1630 gyldisk Erts.

Dergleichen og Segen Gottes Grube er fundne i 1629; om denne sidste bemærker Deichman, at den svarer til sit Navn og er »een af de gavmildeste og meest bestandige ved dette Værk, der af alle Gruber sadt mest i Dybet, og endnu til denne Tiid i Gesenchet viiser smelteværdige Ertzer, om allene de kunde stoppe de svære paagaende Omkostninger.«

I 1632 blev det besluttet alene at drive 10 Gruber, da det næsten var umuligt at holde dem alle igang »formedelst det faste Berg og de smale, tynde Gange.«

I 1635 fandtes Gangen i Gruben Hellig Trefoldighed, i hvilken 6 Mark gedigent Sølv stod i den aabne Kløft. Dette Aar skal der have været henimod 300 Bergarbeidere ved Verket foruden de unge i Pukværkerne og andensteds samt Betjenterne. I 1636 og 37 angives 290 Personer, hvoraf 162 var Tyskere.

Ved Befaring i December 1637 besluttedes at indstille den rige Hans Sachsen Grube, der var afskaaret i 9 Lagters Dyb; Ertz Engel Michael skulde derimod undersøges i sit  $3\frac{1}{2}$  Lagters Dyb, og Fortuna Grube optoges. Kobbergruben Der verlorne Sohn blev indstillet i 1639.

Hannibals Grube, opkaldt efter Statholder Hannibal Sehested, opdagedes 1642, og senere fandtes Fraulein Christiana.

Willen Gottes og Gnade Gottes indstilledes i 1642.

Imidlertid maa man i 1642 have begyndt at lide under det tiltagende Dyb; thi det hedder i Beretning af 1642, at »Gruberne bliver dybere, Fordringen tyngre, mere vanddrægtige, Stenen fast, at Gangerne falder af og til, snart mægtige, snart smal, snart ædel, snart uædel, og bliver nu alene bygget paa de fornemste Gruber; skulde man nu lægge flere Folk af, vilde man ikke længe have Bergværk; thi skulle Gesencher og Feltorter ikke drives, og alene udhugges Strosserne, vilde Gruberne inden kort Tid blive som en Sump,

ligesaa om ikke Stollerne blive drevne, maatte de fleste Gruber forlades, om endskjønt der var gode Anbrucher.«

I 1646 var 20 Gruber i Drift paa Kongsberg, deraf 7 paa Overbjerget og 13 paa Underbjerget. Ertserne ifra Braunschweig Grube og Nye Juuls Gruber viste sig gyldiske.

I Juli Maaned 1648 var følgende Gruber i Drift:

| Paa Overbjerget:               | Dybde i<br>Lagter. |
|--------------------------------|--------------------|
| Kongens Grube *                | 15                 |
| Hilf Gott zu Ertz              | 5                  |
| Alter Schurf Junge Sophia      | 2                  |
| Armen Grube*                   | 13                 |
| Neben trum                     | 7                  |
| Des Hr. Jungen Printzen Grube* | 24                 |
| Herzog Friderich *             | 23                 |
| Drey Brüder Grube              | 23                 |
| Keller Grube                   | 13                 |
| St. Samuëls Grube              | 19                 |
| Neben trum                     | 19                 |

Paa Underbjerget:

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Herzog Ulrich *            | 22 |
| Commissarien Grube *       | 7  |
| Englische Grus             | 2  |
| Salomon                    | 1  |
| Fräulein Christiana.       |    |
| Licht-Loch                 | 4  |
| Hannibal                   | 10 |
| Neue Braunschweig          | 11 |
| Alte Juul*                 | 4  |
| Neue Juul                  | 9  |
| Neben trum                 | 3  |
| Segen Gottes*              | 21 |
| St. Christopher der kleine | 1  |
| Kupferberg vermags Wa      | 6  |

Summen angives til 23 Sølvgruber og 1 Kobbergrube, idet vel ovennævnte Licht-Loch ikke er medregnet.

Hvis man sammenligner denne Fortegnelse med Fortegnelsen fra 1628, saa sees at 4 (med Stjerne betegnede) Gruber fra 1628 endnu i 1648 er i Drift paa Overberget og 4 (ligeledes med Stjerne betegnede) er i Drift paa Underberget. 7 nye Gruber er komne i Drift paa Overberget, hvoriblandt to Sidegange, en til Armen og en til St. Samuels Grube. Paa Underberget er 8 nye Gruber tagne i Drift, hvoriblandt en Sidegang til Neue Juul. Nedlagt synes efter Fortegnelsen følgende fem Gruber paa Overberget at have været, nemlig Hoffnung, Kisgruben Charitas, Fortuna, Haus Sachsen og Ertz Engel Michael, og paa Underberget savnes paa Fortegnelsen følgende fra 1628: Blygangen, Braunschweig, Der gleichen og Quartale. Ved selve Gruberne var i 1648 292 Personer beskjæftigede, og desuden 98 ved Pukværkerne Hytten og som Betjente, tilsammen 390 Mand. Stærkest belagt var Herzog Ulrich med 44 Hauere foruden Stigere, Knægte og Smede. Der var to Pukværk, et med 6 og et med 9 Stempler foruden et Pukværk ved Hytten med 6 Stempler. Af hine 390 Personer var 240 Normænd og 150 Tyskere. Produktionen af fint Sølv i 1648 var 6485 Mark, og i 1651 5316.

I 1654 fandtes »Gottes Hülfe in der Noth«, om hvilken det heder, at den har hjulpet Værket af dets Nød og Gjæld. I 1654 var 17 Gruber i Drift, af hvilke 5 havde temmelig gode Anbrud, og blandt disse nævnes Gottes Hülfe og Segen Gottes som de vigtigste. 1672 var 485 Mand beskjæftigede ved Sølvværket, men Produktionen sank i 1673 til 3024, laveste Produktion siden 1627. Efter en Relation af 1673 fra Christian Gjedde til Christian V. var Grubernes Antal da 80, hvoraf 37 i Drift, iblandt disse nævnes i Besynderlighed Gabe Gottes, Gott mit König Friederich, Gottes Hülfe in der Noth, som den Tid var neddrevet 30 Lagter, Keller Grube

(16 Lagter), Sachsen, Samuel (44 L.), Gott allein die Ehre (20), Englischer Grus (21 L.), Hannibal (27 L.), Segen Gottes (52 L.), Julius (20 L. dyb). Af de 80 Gruber var 20, som ikke var i Drift, af slet Forfatning, 23, som heller ikke var i Drift, kunde efterhaanden optages, og 37 var som før be-  
rørt belagt.

I 1676 indbød den daværende Eier af Sølvværket, Rentemester Müller, til Dannelsen af et Participantskab til et nyt Sølvværk i Nummedal, 1 til 2 Mil NNO. for det gamle Sølvværk.

I 1676 ved 10 Maanedes Slutning var følgende Gruber kjendte, dels i Drift dels nedlagt:

| Overberget:                        | Dybde i<br>Lagter. |
|------------------------------------|--------------------|
| Ertz Gott beschertz (hviler).      |                    |
| Güte Gottes . . . . .              | 9 $\frac{1}{2}$    |
| Almacht Gottes (hviler).           |                    |
| Gabe Gottes . . . . .              | 16 $\frac{1}{2}$   |
| Skjærp næved . . . . .             | 2 $\frac{1}{2}$    |
| Ihro K. Maj. Gr.                   | } hviler.          |
| Junge Sophia                       |                    |
| Hoffnung                           |                    |
| Charitas                           |                    |
| Gott mit Kønig Friderich . . . . . | 18 $\frac{1}{4}$   |
| Hilf Gott zu Ertz                  | } hviler.          |
| Tandem                             |                    |
| Armen Grube                        |                    |
| Justitia . . . . .                 | 6 $\frac{1}{4}$    |
| Skjærp næved . . . . .             | 5 $\frac{1}{4}$    |
| Barmhertzigk. Gottes (hviler).     |                    |
| Rosen Gang . . . . .               | 18 $\frac{1}{2}$   |
| Gnade Gottes                       | } hviler.          |
| Mildigkeit Gottes                  |                    |
| Willen Gottes                      |                    |

|                                                                                              | Dybde i<br>Lagter. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| Gott bescheret Ertz . . . . .                                                                | 8                  |
| Libertas }<br>St. Daniel } hviler.                                                           |                    |
| Skjærp nærved . . . . .                                                                      | 2 $\frac{1}{2}$    |
| Gottes Hülfe in der Noth . . . . .                                                           | 34 $\frac{3}{4}$   |
| Licht-Loch . . . . .                                                                         | 15 $\frac{1}{2}$   |
| Hertzog Friderich (hviler).                                                                  |                    |
| Jungen Printzen . . . . .                                                                    | 14                 |
| Drey Brüder nehm trumen (hviler).                                                            |                    |
| Lich-Loch derbag . . . . .                                                                   | 10                 |
| Keller Neben trum (hviler).                                                                  |                    |
| Alte Hoffnung . . . . .                                                                      | 3                  |
| Neue Hoffnung . . . . .                                                                      | 7 $\frac{1}{3}$    |
| Licht-Loch.                                                                                  |                    |
| Patientia }<br>Fortuna } hviler.                                                             |                    |
| Morgen-Stern . . . . .                                                                       | 4 $\frac{1}{4}$    |
| Sachsen }<br>Ertz Engel Michael }<br>Elisabeth } hviler.<br>Barmhertzigkeit }<br>Gyldenløw } |                    |
| St. Jakob . . . . .                                                                          | 7 $\frac{1}{2}$    |
| Paa Underberget:                                                                             |                    |
| Beständige Liebe . . . . .                                                                   | 4 $\frac{1}{2}$    |
| St. Jørgen }<br>Emanuel } hviler.                                                            |                    |
| St. Samuel.                                                                                  |                    |
| Skjærp nærved . . . . .                                                                      | 4                  |
| Silber Spuhr . . . . .                                                                       | 7 $\frac{1}{2}$    |
| Skjærp nærved . . . . .                                                                      | 1 $\frac{1}{2}$    |
| Dreyfaltigkeit . . . . .                                                                     | 8                  |

|                                    | Dybdø i<br>Lagter. |
|------------------------------------|--------------------|
| Commissarien Grube . . . . .       | 5 $\frac{1}{4}$    |
| St. Johannes . . . . .             | 17 $\frac{1}{4}$   |
| Neben trum . . . . .               | 4 $\frac{1}{2}$    |
| Neben trum . . . . .               | 19 $\frac{1}{2}$   |
| Hertzog Ulrich . . . . .           | 16                 |
| Fortitudo . . . . .                | 9 $\frac{1}{2}$    |
| Kom Glück ertrenne Hoffnung        | } hviler.          |
| Englische Grus                     |                    |
| Gott allein die Ehre . . . . .     | 5 $\frac{1}{4}$    |
| Salomonis (hviler).                |                    |
| Kong David . . . . .               | 11                 |
| Alte Fräulein Christiana . . . . . | 15                 |
| Neue ditto                         | } hviler.          |
| Bjelken Gr.                        |                    |
| Concordia . . . . .                | 7 $\frac{1}{2}$    |
| Skjærp næved . . . . .             | 4                  |
| Bleygang . . . . .                 | 9 $\frac{1}{2}$    |
| Hannibal . . . . .                 | 28                 |
| Braunschweig . . . . .             | 24                 |
| Skjærp næved . . . . .             | 6                  |
| Alte Julius (hviler).              |                    |
| Neue Julius . . . . .              | 8                  |
| Licht-Loch.                        |                    |
| Segen Gottes . . . . .             | 57                 |
| Skjærp næved . . . . .             | 3 $\frac{1}{2}$    |
| Dergleichen                        | } hviler.          |
| Grosse Christopher                 |                    |
| Liebe Gottes                       |                    |
| Christianus Vtus                   |                    |

## I Jondalen:

Unverhoft geschieht oft.

In Limbo.



## Forskjellige smale sølvholdige Drummer.

Sum af drevne og nedlagte Gruber uden Skjærp 67,  
hvoraf 39 hviler og 28 drives:

## Kobbergruber.

Gott vermags

|                      |    |        |           |
|----------------------|----|--------|-----------|
| Verlohrne Sohn . . . | 16 | Lagter | } hviler. |
| Wird gesucht . . .   | 8  | —      |           |
| Kisgang . . . . .    | 7½ | —      | (drives). |

Hvis man sammenligner Fortegnelsen fra 1676 med den fra 1648, saa vil det være paafaldende, hvormange af Gruberne fra 1648, som er nedlagte i disse 28 Aar. Kongens Grube, Hilf Gott zu Ertz, Junge Sophia, Armen Grube, Herzog Fride- rich, Drey Brüder, Keller Grube og St. Samuel, alle disse er nedlagte. I 1676 nævnes Jungen Printzen Grube 14 Lagter dyb, i 1648 Des Hr. Jungen Printzen Gr. 24 Lagter dyb. Dette kan under ingen Omstændigheder være samme Drift, eftersom Gruben i 1648 er 24 Lagter dyb og i 1676 kun 14, men dette er den eneste af de 8 Gruber fra 1648, som endnu er i Drift. Derimod er 12 nye Gruber tagne i Drift og desuden alte Hoffnung, som blev drevet i 1631. Af de 11 Gruber paa Underberget ifra 1648 er 4 nedlagte. Mærkværdig nok angives 3 Grubers Dyb mindre i 1676 end i 1648, nemlig

|                          | 1648 | 1676 |
|--------------------------|------|------|
| Commissarien Grube . . . | 7    | 5½   |
| Herzog Ulrich . . . . .  | 22   | 16   |
| Neue Juul . . . . .      | 9    | 8    |

Aarsagen er maaske den, at man i 1676 har arbeidet i mindre Dyb eller paa Sidegange.

Fortegnelsen viser imidlertid, at af 9 Gruber, som var i Drift paa Overberget i 1648, var 8 nedlagte i 1676, derimod er 12 nye Gruber tagne i Drift. Af 11 Gruber paa Underberget i 1648 er 4 nedlagte og mindst 10 nye tagne i Drift.

Dette er isandhed store Forandringer og synes at antyde .

liden Ihærdighed i Drifren paa Gangene, men en livlig Skjærpning nær Overfladen.

Efter Kommissionen af 1682 har følgende Gruber være ved Sølvværket: C. IV eller Kongens Gr., Gott mit König Friderich, Armen Gr., Justitia med Skjærp, Gabe Gottes Gr., Güte Gottes Gr., Rosengang, Gott bescheret Ertz, Herzog Friderich, Gottes Hülfe i. d. Noth Gr., Gamle Hoffnung, Nye Hoffnung, Printsens Gr., Keller Gr. med Nebendrum, Mildigkeit Gottes Gr., Samuels Gr. og Silber Spur, St. Johannes Gr., Englischer Grus, Gott allein die Ehre, König David, Bleygang, Nye Braunschweig Gr., Nye Julius Gr., Segen Gottes Gr., Kies Gr., Lindbo Gr., St. Daniels Gr., Schurf ved Fortuna, Beständige Liebe, Herzog Ulrich Gr. og Lichtloch, Schurf Fortitudo, Kom Gluck ertrenne Hoffnung, Salomons Gr., Fräulein Christiana, Hannibal Gr., Alte Braunschweig Gr., Unverhofft komt oft. Prætorius tilføier, at der har upaatviveligt være flere Gruber ved Sølvværket, men da de ikke er anførte i Forretningen, saa er deraf at slutte, at de til den Tid har været forladte eller helt nedlagte.

I 1685 indkaldtes fra Harz Henrich Schlanbusch, en dygtig Bergmand, men som det synes en meget despotisk Herre. Han beretter, at ved hans Ankomst var de fleste Gruber indstillede, og de faa i Drift værende kun hist og her belagte. Segen Gottes, som da var 70 Lagter dyb, stod man i Begreb med at indstille, paa Grund af »at Ertserne her i Norden ikke vil fortsætte i Dybet«. Slanbusch kom til Verket i 1686 og begyndte strax at bygge nye Maskiner, Vandkunster, Damme og Vandledninger.

Slanbusch giver en Fortegnelse over de Gruber, som blev drevne i hans Tid, og det Dyb, de naaede.

|                             | Grubens Dyb<br>i 1686<br>Lagter. | Grubens Dyb<br>i 1701<br>Lagter. |
|-----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Segen Gottes . . . . .      | 70                               | 124                              |
| Juuls Gr. . . . .           | 21                               | 50                               |
| Hannibal . . . . .          | 28                               | 56                               |
| Blygangen . . . . .         | 11                               | 26                               |
| Herzog Ulrich . . . . .     | 25                               | 30                               |
| Samuel . . . . .            | 25½                              | 41                               |
| Printzesse Sophia Hedevig . | 6                                | 26                               |
| Beständige Liebe . . . . .  | 1                                | 36                               |
| Gabe Gottes . . . . .       | 15                               | 40                               |
| Armen Gr. . . . .           | 14                               | 34                               |
| Gott mit König Friderich .  | 21                               | 45                               |
| Christiani 4te Gr. . . . .  | 13                               | 28                               |
| Gottes Hülfe in der Noth .  | 22                               | 40                               |
| Sachsen Gr. . . . .         | 3                                | 24                               |
| Dens Siderum . . . . .      | 2                                | 12                               |

Nye Gruber optagne af Sianbusch er:

|                               | Dyb i<br>Lagter. |
|-------------------------------|------------------|
| Königin Lovise . . . . .      | 7                |
| Else Gr. . . . .              | 26               |
| Vater Adam . . . . .          | 8½               |
| Christianus Qvintus . . . . . | 11½              |
| Charlotta Amalia . . . . .    | 10               |

Begyndelsen af det attende Aarhundrede var en god Tid for Sølvværket; iblandt den Tids rigeste Gruber nævnes Gabe Gottes, Amalia, Samuel, Blygangen, Sachsen, Brunsvig; iblandt de fattigere Gottes Hülfe in der Noth og Drei Brüder med flere. Der var 21 Gruber i Drift og 3 Pukværker.

Paa Østsiden af Lougen i Bæveraasen fandtes 1721 Fredricus IV og Aaret efter længer nord Anna Sofia, der i 1725 gav Sølv for 30,000 Rdr., og Neues Glück, 1½ Mil Nordost fra Kongsberg, hvilke Gruber gav rigeligt i Begyndelsen.

I Aaret 1721 paabegyndtes Underbergstollen, hvilken naaede frem til Blygangen i Aaret 1756. Den maatte i denne Tid ofte hvile paa Grund af Værkets slette Silstand. Oberbergstollen blev anlagt noget senere end 1721, men blev strax indstillet.

Underbergstollen, hvis Mundloch ligger nordenfor Kongsberg By i en Afstand af  $\frac{1}{3}$  Mil ifra Hytten, er den dybeste Stol paa Kongsberg. Den gaar i vestlig Retning ind til Blygangen Grube, og deler sig her i en Fløi mod Nord og en Fløi mod Syd, hvilke Fløie løser de største af Underbergets Gruber i 67 til 92 Lagters Dyb. Forslaget til denne Stol er gjort af Oberstlieutenant Schort ved Aardal, og han var af den Mening, at Værket ved denne Stol skulde blive istand til at producere ligesaa meget Sølv i en Maaned som tidligere i et Aar.

I Magazin for Bergmandsefterretninger No. 12, 1876 findes en Anmærkning af Brünich om Underbergstollen: Udi Aaret 1765 var vel bemeldte Underbergs- og Overbergsstoller langt fra ikke færdige, dog ere mange Gruber ved sammes Durchschlag allerede blevne hjulpne, hvorom til Oplysning følgende tjener:

Brünich angiver Underbergsstollens Længde saaledes (1765?).

|                                           | Lagter.           | Dyb hvori<br>Stollen ind-<br>bringer.<br>Lagter. |
|-------------------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------|
| Røsk til Mundloch . . . . .               | 23                |                                                  |
| til første Lichtloch (dyb 53 Lgtr.) . . . | 157               |                                                  |
| dettes Længde . . . . .                   | 5                 |                                                  |
| til andet Lichtloch (dyb 51 Lgtr.) . . .  | 160 $\frac{1}{2}$ |                                                  |
| dettes Længde . . . . .                   | 5                 |                                                  |
| til tredje Lichtloch . . . . .            | 155 $\frac{3}{4}$ |                                                  |
| dettes Længde . . . . .                   | 5                 |                                                  |
| til Blygangen Grube . . . . .             | 185 $\frac{1}{2}$ | 75                                               |
|                                           | <hr/>             |                                                  |
|                                           | 697 $\frac{3}{4}$ |                                                  |

|                                           | Lagter.                      | Dyb, hvori<br>Stollen ind-<br>bringer.<br>Lagter. |
|-------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|
| Videre til Underbergs Gruberne mod Nord:  |                              |                                                   |
| til Hannibal . . . . .                    | 94 $\frac{1}{4}$             | 70 $\frac{1}{8}$                                  |
| under Braunschweig til Juels Gr. . . . .  | 79 $\frac{1}{8}$             | 67                                                |
| til Gamle Segen Gottes . . . . .          | 197 $\frac{1}{2}$            | 68 $\frac{3}{4}$                                  |
| til Dronning Sophia Magdalene Gr. . . . . | 60                           | 69 $\frac{7}{8}$                                  |
| til Christian V Gr. . . . .               | 149 $\frac{3}{4}$            | 70 $\frac{3}{8}$                                  |
| til Prinds Christians Gr. . . . .         | 13                           | 73 $\frac{3}{8}$                                  |
| til Charlotte Amalia . . . . .            | 19                           | 72                                                |
|                                           | 1332 $\frac{3}{8}$ 1)        |                                                   |
| Til Blygangens Grube mod Syd:             |                              |                                                   |
| til Fräulein . . . . .                    | 237                          | 75 $\frac{1}{8}$                                  |
| til Gott allein die Ehre . . . . .        | 80 $\frac{1}{9}$             | 85 $\frac{5}{8}$                                  |
| til Englischer Gruss . . . . .            | 17                           | 75 $\frac{5}{8}$                                  |
| til Herzog Ulrich . . . . .               | 142                          | 81                                                |
| til Johannes Gr. . . . .                  | 28                           | 79                                                |
| til H. Trefoldighed . . . . .             | 307                          | 85 $\frac{3}{8}$                                  |
| til Silber Spaer . . . . .                | 153 $\frac{1}{2}$            | 85 $\frac{3}{4}$                                  |
| til Sophia Hedevig . . . . .              | 38 $\frac{3}{4}$             | 88 $\frac{1}{4}$                                  |
| til Samuel . . . . .                      | 22 $\frac{1}{4}$             | 92 $\frac{1}{4}$                                  |
|                                           | tilsammen 1027 $\frac{1}{4}$ |                                                   |

ialt 2359 $\frac{4}{8}$  Lgtr. 1)

Derpaa tilføies: fra Blygangen Gr. mod Nord er Stollen igjennem, mod Syd er den igjennem til St. Johannes og ppt. 100 Lagter sønden denne Gr., og fra Samuels Grube er avanceret 100 Lagter, mangler altsaa endnu 300 Lgtr. Stolorten drives med  $\frac{1}{2}$  Lgtr. Høide og  $\frac{3}{4}$  til 1 Bredde.

I Brünnichs Kongsbergs Sølvværk hedder det: Den i Aaret 1721 til Anlæg gjennem Underberget resolverede Hoved-

1) Brünnich angiver Længden til Charlotte Amalie til 1332 $\frac{3}{8}$  L., medens Summen af de enkelte Afstande sees at være 1310 $\frac{5}{8}$  L., og Stollens samlede Længde bliver 2337 $\frac{7}{8}$  Lagter.

stolle naaede langsomt af Mangel paa Understøttelse til Udgifternes Bestridelse den bestemte Fremgang, og ikke førend i Aaret 1758<sup>1)</sup> under Berghauptmand Stuckenbrocks Direktion indbragtes den i den nærmeste Grube Blygangen, hvorfra den siden fortsattes, men fuldførtes langsomt, da den ikke førend i min (Brünnich's) Direktionstid 1802 naaede sit sidste Gjennemslag i Samuels Grube. Stollens hele Længde udgjorde da 2464 $\frac{3}{4}$  Lagter, som vil have kostet omtrent 200,000 Rd., hvorom læses min Indberetning i Collegial-Tidenden af 8de Mai 1802.

Böbert giver følgende Tal<sup>2)</sup>. Længde med Krumninger er 697 Lagter, Sidefløie til Syd til Samuels Grube 985 Lagter, til Nord 782 indtil 80 Lagter forbi Charlotte Amalia, den samlede Længde altsaa 2464, hvilket stemmer med Brünnichs Tal. Saalen i Underberget ligger 20,27 Lagter dybere end Saalen i Nordre Christians Stol i Jondalen. Stigningen i Underbergstollen skal være 6 Lagter til Blygangen. Underbergstollen er saaledes den dybeste Stol paa Kongsberg. Om en Stol anlagdes fra Labrofos, saa vilde denne efter Böbert med en Længde paa  $\frac{1}{2}$  Mil naa Underbergets og Overbergets Ertsfeldt 55 Lagter dybere end Christians Stoll.

I 1737 var der 1600 Arbeidere ved Sølvværket.

I 1751 var følgende Gruber i Belæg:

Iste Revier: Gabe Gottes, Armen, Christiani Quarti, Gottes Hülfe i. d. Noth, Keller, Else, Sachsen (skal være opdaget 1629) Schurf ved Aschebeck, Braatte Schurf, Schurf ved Justits-Stollen (2 Gabe Gottes Pukværker).

2det Revier. Cronprinzen, Friderichus Qvintus, Hannibal, Braunschweig, Juels, Alte Segen Gottes (skal være opdaget 1628 (staar 1618) og være over 200 Lagter dyb), Sophia Magdalena, Prinz Christian, Friderici quarti (Joenthals Pukværk).

<sup>1)</sup> Skal sikkerlig være 1756.

<sup>2)</sup> Nogle Antydninger til Underbergstollens fremtidige Benyttelse: I Kommissionsbetænkning af 1865.

3die Revier. Samuels Gr. og Schurfer, Sophia Hedewig, Silber Spur, Hellig Trefoldighed, Gamle og Nye Herzog Ulrich (skal være fundne 1626), Johannes, Concordia, Gott allein die Ehre, Englicher Gruss, Fräulein Christiana, Salomons Gr., Blygang Gr., Hovedstollen til Underberget, Kis Gr. paa Eger, (2de Herzog Ulrich Pukværker).

4de Revier. Christiani Viti Gr., Sophia Magdalena Gr. og Schurf, Schurf ved Glück auf, Princesse Louise Gr., Ulrica Gr., Ny Segen Gottes Gr., Oberberg Stollen, Ramberg Schurf, Schurf ved Gamle Anna Soph., (Rafnaas og Stads Pukværker).

I 1751 var der 1960 Bergarbeidere.

300 Mand ved Pukværkerne.

tilsammen 2260 Mand.

Værkets samtlige Udgifter i 1751 var 286,581 Rd. 36 Sk.

I dette Aar er altsaa 43 Gruber og Skjærp i Drift, 2 Stoller og 7 Pukværker i Drift og Arbeidernes Antal ved Gruberne og Pukværkerne er 2260, uden Hyttarbeidere og Betjente.

I 1754 var i 1ste Revier de samme Gruber i Drift som i 1771 med Undtagelse af Schurf ved Aschebeck og Schurf ved Justits-Stoll og desuden Gott mit König Friederich, Willen Gottes, Kies Gr., Østre Schurf, Schurf ved nordre Stadsmyr. 2det Revier de samme som i 1751 og Charlotte Amalie. I 3die Revier som i 1751 med Undtagelse af Sophia Hedewig Gr., Concordia Gr., Gruss, Fräul. Christiana og Salomons Grube samt Hovedstollen til Underberget. I 4de Revier var Anna Sophia taget i Drift, og forøvrigt som i 1751 med Undtagelse af Sophia Magdalena Gr., Schurf ved Glück auf, Oberbergstollen, Ramberg Schurf og Schurf ved gamle Anna Sophia. I 1754 var der af Bergarbeidere 2100

Ved Pukværkerne 300

tilsammen 2400

og Sølvværkets Udgifter var 291,387 Rdr. 71 Skill.

Ifra 1751 til 1754 er altsaa 7 Gruber optagne, 11 nedlagte og Arbeidet i begge Stollerne indstillet, men Bergarbeidernes Antal forøget til 2400. Det samlede Antal Gruber i Drift i 1754 er 41.

Da Heltzen var Berghauptmand (1747—1770) udvidedes Driften betydeligt. Han forøgede Pukværkernes Antal fra 7 til 24, og Arbeidernes Antal steg fra 1756, da der var 2500, indtil 4000 i 1771 og nogle følgende Aar. I 1778 var der 3100 Mand, og det blev dette Aar besluttet, at Antallet skulde indskrænkes til 2500 Mand.

Brünnich giver følgende Fortegnelse over de Gruber, som var i Drift i 11te Maaned 1770. 1ste Revier. 1) Kisgruben i Sandsvær med forskjellige Skjærp, 2) Nordre Stadsmyr, 3) Gabe Gottes, 4) Armen Gr., 5) Christian IVdes Gr., 6) Gamle Justits Grube og Stoll, 7) Gottes Hülfe in der Noth, 8) Herzog Ulrichs Grube og Gamle Gottes Hülfe in der Noth Gr., 9) Ilse eller Else Gr., 10) Verlohruæ Sohn, Kobbervold Skjærp, 11) Helgerud Skjærper No. 1, 4, 5 og 8, 12) Jonsknude Skjærper No. 5, 6, 7 og 13. Obs. Disse under No. 7 og 8 anførte Skjærper ere for faa Aar siden blottede i et nyt Feldt, adskilt fra de andre Gruber og med ganske anden Stenart og Feldtarter end de gamle; de have alle i Begyndelsen givet rigelig og især Jonsknudens Skjærper, fast lige med Gottes Hülfe in der Noth, men have noget aftaget. 2det Revier. 1) Sachsen Gr. og Skjærp, 2) Nye Skjærp ved Ilsedam, Skjærp ved Lovise Grube, Skjærp paa Nordre Side, Skjærp ved Morgenstjerne Grube, 3) Morgenstjerne Grube, 4) Gud med Kronprinds Christian og Kronprindsens Gr., 5) Friderici Viti Gr., 6) St. Andreas Grubes Skjærper, Skjærp i Fulsebak Aasen, givet 27 Mk. 12 Lod gedigent Sølv, 137  $\text{R}$  Mittelerts og 50 Td. Scheiderts, 7) Juels Gr. med Skjærp paa nordre Side, 8) Gamle Segen Gottes Gr., Dergleichen Gr. samt Skjærp paa Nordside, 9) Prinds Christians Gr., 10) Christian Vte Gr., 11) Charlotte Amalie Gr., 12) Gamle Jondal Grube foreslaaet



paany at belægges, 13 Kjennerudvandets Skjærp. 3die Revier.

1) Samuels Gr., Sophie Hedevids Gr., Skjærp paa nordre, item paa søndre Side, 2) Hellige Trefoldigheds Gr. og Skjærp paa nordre Side, 3) Johannes Gr., Ertedybgaug, Commissarius Grube; søndre Concordia Gr., nordre Do., Skjærp paa østre Side, 4) Gott allein die Ehr, Englischer Gruss Gr., Salomons Gr., Skjærp paa søndre Side, andet Skjærp derved, Skjærp paa nordre Side, 5) Fräulein Christiane Gr. med Skjærp paa østre Side og Do. paa nordre Side, 6) Blygangen Gr. med Skjærp paa Nordsiden, 7) Eger Kisgrube, drives paa Kis til Smeltningen. 4de Revier. 1) Christiani Viti Gr. og Sophie Magdalena, 2) Schurf ved Glück auf og Schurf i Dronning-Aasen, 3) Prindsesse Lovise Gr., 4) Ramnaas søndre og nordre Skjærp, 5) Dronning Juliane Marie Gr., 6) Lichtloch et ved nye Segen Gottes Grube No. 9, 7) Nye Skjærper ved Aasland-Aasen No. 1, 2 og 4, 8) Skjærp i Tollem-Aasen, 9) Anna Sophia Gr., 10) Ramberg Skjærp i Ramberg Jorder.

Ialt bliver dette, Gruber og Skjærp, henimod 80 i Tallet; Arbeidernes Antal udgjorde ved denne Tid omkring 4000.

Paa de forskjellige Revierer er Gruberne fordelt saaledes :

|             |      |
|-------------|------|
| 1ste Revier | 20   |
| 2det        | — 21 |
| 3die        | — 24 |
| 4de         | — 14 |

I 1778, da der var 3100 Mand ved Værket, blev det besluttet, at Antallet skulde indskrænkes til 2500, og i 1780 var Grubernes Antal og Belægget som følger:

|             |      |        |     |       |
|-------------|------|--------|-----|-------|
| 1ste Revier | 10   | Gruber | 632 | Mand. |
| 2det        | — 8  | —      | 551 | —     |
| 3die        | — 10 | —      | 576 | —     |
| 4de         | — 8  | —      | 373 | —     |

tilsammen 36 Gruber 2132 Mand.

I disse Tal synes ikke Hyrtearbeidernes og Værkets

Betjente et være medregnede, idet det kun indbefatter Arbejderne ved Gruberne og Pukværkerne med deres Stigere.

Efter Brünnich indskrænkedes Personalet — fra 4000 Mand i 1771 og følgende Aar — til 2600, indtil Værket blev nedlagt i 1805.

Christians Stoll paabegyndtes efter Oberberghauptmand Hjorts Forslag i 1782, og det var efter Beslutning af 28de December 1785 Mening, at denne Stol skulde drives gennem hele Overbergets Fahlbaand fra Saggrænden til Jondalen, en Længde, der ansloges til 4330 Lagter. Da man imidlertid havde drevet Stollen i nogle Aar, kunde man ikke skaffe Luft. I den nordre Stol var Vandtilgangen stor. Driften af Kristians Stol blev da indstillet i 1793 i den søndre Del, efterat være inddrevet 453 Lagter; i den nordre Del, var Arbeidet indstillet i 1792, da den havde naaet 419 Lagter ind. Omkostningerne ved Driften af disse Stoller og deres Lichtlocher kostede Bergkassen i disse Aar 241,138 Rdr. 32 Skill.

I Stedet for Kristians Stol begyndte Direktør Brünnich 1791 paa den 52 Lagter høiere liggende Fredriks Stol, men rak ikke at slaa gennem, da Sølvværket blev nedlagt. Der stod endnu 73½ Lagter tilbage. I 1822 sloges denne Stol igjennem til Armen Grube.

— Det er vanskeligt at opgjøre en Beregning over, hvad Kongsberg Værk har givet i Overskud fra de ældste Tider. Dels er Opgaverne ikke fuldstændige, dels kommer der i Værkets Regnskaber ind en hel Del Bergværket uvedkommende Poster. Fra 1700 til 1884 har man imidlertid Beretninger om Tab og Gevinst, men fra 1623—1699 er det vanskeligere at opgjøre Værkets Status.

1623—27. Kristian IV drev Værket for egen Regning fra 1623 til 1627.

Efter Deichman var Produktionen i hine Aar 6956 Mark. Brünnich siger i sin Bog »Kongsberg Sølvbergverk«, at saavidt af Regnskaberne kan skjønnes, var indtil den Tid udbragt for

kongelig Regning 4937 Mark 15½ Lod, som udgjorde 49488 Rdr. Courant efter den Tids Beregningsmaade.

Omkring 6000 Mark, 1000 Mark mere eller mindre, synes altsaa Kristian IV at have faaet som Bruttoudbytte i de Aar, han drev Værket for egen Regning. Det vil sige i vore Penge Sølv for omkring 200000 Kroner.

Trods det, at Sølvets Værdi paa hin Tid sammenlignet med andre Varer vistnok havde den tredobbelte Værdi, kan Kongen neppe have tjent synderlig paa Driften; thi der var eu hel Del Bygninger at opføre, og han hentede tyske Bergmænd ind. At han solgte Værket mod en Tiendedel af Bruttoudbyttet samt mod at faa købe en Mark Sølv for 8 Rdr., tyder ogsaa paa, at han ikke har tjent synderlig paa Sølvværket

Paa de anførte Betingelser overdrog Kongen Sølvværket til et Participantskab, idet han selv beholdt en Ottendedel.

1628—1661. Participanterne indskjød 8000 Rigsdaler til Driften, og drev Værket med vekslede Held. Fra 6te April 1628 til Udgangen af 1641 erholdt Kongen 57106 Rigsdaler i Tiende og for sin Ottendepart 5704 Rdr. Heraf synes det at fremgea, at Bruttoudbyttet i disse 14 Aar har været

571060 Rigsdaler.

|                                                 |        |
|-------------------------------------------------|--------|
| Heraf har Kongen faaet i Tiende . . . . .       | 57106  |
| Participanterne i Nettoudbytte . . . . .        | 45920  |
| Følgelig bliver Fortjenesten i 14 Aar . . . . . | 103026 |
| Driftsudgifterne . . . . .                      | 468034 |

Herefter synes de aarlige Driftsudgifter i hin Tid at have beløbet sig til 33000 Rdr., og dette stemmer med, hvad Brännich angiver, at Lønningsregnskaberne for 1636 var at anslaa til 32500 Rdr. Hint Nettoudbytte af 103000 Rdr. var imidlertid høist ulige fordelt paa de forskjellige Aar.

I de følgende Aar gav Værket intet klækkeligt Udbytte, kom endog lidt i Gjæld, hvilken blev betalt i 1647, og Værket gav derhos i dette Aar et Udbytte af 8100 Rdr. Ifra 1648

til 1653 synes Overskudet at have været lidet, om der var noget; i de sidste Aar var der endog Zubus. Da opdages i 1654 Gottes Hülfe in der Noth, hvorved ei alene Gjælden (18000 Rdr.) blev betalt, men Geverkskabet fik desudeu et Udbytte af 11000 Rdr. I de følgende Aar er der følgende Udbytte (Brünnich Pag. 139):

|                |       |
|----------------|-------|
| 1654 . . . . . | 10000 |
| 1655 . . . . . | 8000  |
| 1656 . . . . . | 7000  |
| 1657 . . . . . | 2850  |
| 1658 . . . . . | 7600  |
| 1659 . . . . . | intet |
| 1660 . . . . . | 3556  |

tilsammen . . . 39006 Rigsdaler

foruden den kongelige Tiende, som da Værkets Produktion i hine 7 Aar var omtrent 47000 Mark, maaske kan anslaaes til 37—38000 Rigsdaler. I de 33 Aar, da Participanterne drev Værket synes altsaa Nettoudbyttet at have udgjort omkring 185000 Rdr., men da der her er regnet 94000 Rdr. til den kongelige Tiende, saa har Participanternes Udbytte efter dette kun udgjort 91000 Rdr., eller ikke 3000 Rdr. om Aaret i Gjennemsnit. Der blev fremsat den Beskyldning mod Participanterne, at de drev paa Rov, og Kongen besluttede at kjøbe Sølvværket for 24000 Rdr.

1661—1673. I disse Aar blev Værket drevet for Kongens Regning. Efter Deichman havde han ifra 1661—65 underet et Udbytte af 69425½ Rdr. Indtil 1671 gik det endnu godt med Værket, men Forraadene var i de foregaaende Aar stærkt medtagne og Forsøgsarbejderne forsømte. Oberbergmester Barth forlangte 1673 de Bergkyndiges Erklæring, hvilken gik ud paa, at hvis man alene skulde arbeide der, hvor der var Anbrud, saa var det snart ude med Værket, at Lønnen var saa ringe, at intet mere kunde afkortes, og at Værket blev immer besværligere, fordrer flere Omkostninger

med Kunster og Dammer og sluttelig, at Kongen maa komme Værket til Hjælp. Kongen havde i de sidste 14 Aar havt en Indtægt af Værket af 23250 $\frac{1}{2}$  Rdr. eller 16607 Rdr. om Aaret; 1671 havde han en Indtægt af 17564 Rdr. Frederik III havde altsaa tjent godt paa Værket, som han havde overtaget for 24000 Rdr. Men da der var Tale om at yde Tilskud foretrak Kristian V at sælge Værket og at hæve Tiende og Mynteprofit af Udbyttet.

1673—83. Kongen solgte i 1673 Værket til Rentemester Müller for 119136 Rdr.

Denne drev Værket i 10 Aar, uden at man kan bestemme, om han har havt Tab eller Gevinst. I 1678 aabnedes rige Anbrud i Segen Gottes og derefter ligesaa i Gott mit König Friderich, som i 12 Aar havde været drevet paa Forhaabning. Efter Berghauptmand Schlanbusches Beretning skal der være udbragt i 4 Aar fra ultimo 1678 til Udgangen af 1682 31336 Mark fint Sølv til Værdi af 300000 Rigsdaler, fornemmelig hentet fra Segen Gottes.

Produktionslisterne angiver imidlertid:

|                |      |
|----------------|------|
| 1679 . . . . . | 7145 |
| 1680 . . . . . | 7420 |
| 1681 . . . . . | 6095 |
| 1682 . . . . . | 5224 |

Altsammen . . . 25884 Mark.

Den samlede Produktion fra 7de Maaned 1673 til Udgangen af 1683 var 50391 Mark.

Ved kongelig Ordre af 1683 blev Værket frataget Müller, uden at det sees, at han har nydt nogen Erstatning. Der lægges ham vistnok medrette tillast, at han drev Gruberne paa Rov. Han antages at have havt en Bruttoindtægt, den kongelige Tiende og Myntprofit fraregnet, af 426800 Rigsdaler i hine 10 Aar og Brochmann siger, at de aarlige Udgifter ikke oversteg 30000 til 34000 Rdr. Hvis disse Tal er rigtige, skulde hans Indtægter have udgjort 86000 Rdr.

1684—1693. Da Kongen overtog Værket i 1684, gik det daarligt, og han maatte give 2000 Rigsdaler maanedlig i Tilskud, og dette fortsatte til 8de Maaned 1685; i 1686 og 87 var der ingen Tilskud, men i 1688 14279 Rdr. Gjæld, i 1686 en Gjæld paa 29686 Rdr. Der behøvedes Tilskud til Sølvværket indtil 1693, da Segen Gottes gav meget Sølv. I 1690 assisterede Kongen Værket med 500 Tdr. Rug og lod Bøndernes Tilgodehavende likvidere i Skatterne. Dertil gav han Værket Jernværkernes Tiende, 2500 Rdr. 60 Skilling. en Del Kobber Accise, aarlig 782 Rdr. 60 Sk., og desuden Indskud i rede Penge 6616 Rdr. 91 Sk. Tilskudene synes i disse 9 Aar at have udgjort henimod 52000 Rdr.

Efter ovenstaaende skulde altsaa Overskud og Tab i det 17de Aarhundrede stille sig saaledes:

|                   | Overskud. | Tab.  |
|-------------------|-----------|-------|
| 1628—61 . . . . . | 185000    |       |
| 1661—72 . . . . . | 232000    |       |
| 1673—83 . . . . . | 86000     |       |
| 1684—93 . . . . . |           | 52000 |
| 1593—99 . . . . . | 49000     |       |
|                   | 552000    | 52000 |
| Endeligt Overskud | 500000    |       |

Efter dette skulde Kongsberg Sølvværk i det 17de Aarhundrede ialt have givet et Overskud af 500000 Rdr, men det maa erindres, at Opgaverne er ufuldstændige, saa at det er tvivlsomt, hvor nær dette Tal kommer Sandheden.

Fra 1700 til 1884 er der Opgaver over Tilskud og Overskud fra Sølvværket for hvert Aar. Disse Opgaver hidsættes nedenfor, først Opgaverne fra 1700—1740.

I Magazin for Bergmandsefterretninger 1877 No. 24 findes i »Stykker af de norske Bergværkers Historie« (af Prætorius) »en Beregning i Rigsdaler over, hvormeget hans Maj. Zahl-Casser, fra Ao. 1700 til Ao. 1755 incl. har bekom-

met af det ved Kongsberg virkede Sølv og deraf myntede Penge samt andre dets Indtægter, samt og, hvad derimod, udi Sølvværkets slette Omstændigheder, ifra Kongl. Zahl-Casser dertil igjen er betalt udi Indskud.« Disse Tal giver rigtignok ikke direkte Sølvværkets Overskud og Tab for hvert Driftsaar, men Summen fra 1700 til 1755 svarer til Sølvværkets Udgifter og Indtægter.

Forfatteren kommer til dette Resultat:

Indtægter 650866 Rdr.

Udgifter 231014 —

Overskud 419852 Rdr.

Men han mener, at hvis Mynteprofiten og Jernværkernes Tiende, som den meste Tid er løbet i Bergkassen, skal drages fra, saa vil det Overskydende falde bort og ingen Gevinst blive. Men da Mynteprofiten er en Gevinst, som følger Sølvværket, saa bliver, hvis Jernværkernes Tiende, som anslaaes til 175000 Rdr., trækkes fra, Overskuddet for den kongelige Kasse i disse Aar 244852, »foruden den Fordel, som Landet har ved de anseelige Summer af contante Penger, som udbringes af Jorden og siden med Avantage for alle, især og for Commercen, roullerer i Landet.«

Tallene fra 1741 til 1790 er fra Thaarups Statistik.

Tallene fra 1790—1805 er fra Krafts topografisk-statistiske Beskrivelse.

Tallene fra 1815—34 er fra Kommissionen af 1833 og de senere Tal fra officielle Beretninger.

Om Tallene fra 1700 til 1755 efter Prætorius maa det som omtalt erindres, at de ikke angiver Overskud eller Tab for hvert Aar, men hvad de kongelige Zahlkasser har taget ind og givet ud. Variationerne i Indtægt og Udgift er altsaa i Virkeligheden større end disse Tal angiver, men det endelige Resultat fra 1700—1755 giver som berørt Sølvværkets Overskud.

| Aar.                | Udgift.<br>Rdr. | Indtægt.<br>Rdr. | Overskud.<br>Rdr. | Tab.<br>Rdr. |
|---------------------|-----------------|------------------|-------------------|--------------|
| 1700 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1701 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1702 . . . . .      |                 |                  | 9000              | —            |
| 1703 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1704 . . . . .      |                 |                  | 4000              | —            |
| 1705 . . . . .      |                 |                  | 29000             | —            |
| 1706 . . . . .      |                 |                  | 10000             | —            |
| 1707 . . . . .      |                 |                  | 23000             | —            |
| 1708 . . . . .      |                 |                  | 24000             | —            |
| 1709 . . . . .      |                 |                  | 25000             | —            |
| 1710 . . . . .      |                 |                  | 18000             | —            |
| 1711 . . . . .      |                 |                  | 36000             | —            |
| 1712 . . . . .      |                 |                  | 59000             | —            |
| 1713 . . . . .      |                 |                  | 41000             | —            |
| 1714 . . . . .      |                 |                  | 34000             | —            |
| 1715 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1716 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1717 . . . . .      |                 |                  | 66000             | —            |
| 1718 . . . . .      |                 |                  | 129000            | —            |
| 1719 . . . . .      |                 |                  | 48000             | —            |
| 1720 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1721 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1722 . . . . .      |                 |                  | 60000             | —            |
| 1723 . . . . .      |                 |                  | 30000             | —            |
| 1724 . . . . .      |                 |                  | —                 | —            |
| 1725 . . . . .      |                 |                  | —                 | 27000        |
| 1726 . . . . .      |                 |                  | —                 | 11000        |
| 1727 . . . . .      |                 |                  | —                 | 48000        |
| 1728 . . . . .      |                 |                  | —                 | 38000        |
| 1729 . . . . .      |                 |                  | —                 | 28000        |
| 1730 . . . . .      |                 |                  | —                 | 8000         |
| 1731 . . . . .      |                 |                  | —                 | 12000        |
| 1732 . . . . .      |                 |                  | —                 | 41000        |
| 1733 . . . . .      |                 |                  | —                 | 11000        |
| 1734 . . . . .      |                 |                  | —                 | 5000         |
| 1735 . . . . .      |                 |                  | —                 | 1000         |
| 1736 . . . . .      |                 |                  | 4000              | —            |
| 1737—1745 . . . . . |                 |                  | —                 | —            |
| 1746 . . . . .      |                 |                  | 5000              | —            |
| 1747—1755 incl.     |                 |                  | —                 | —            |



## Efter Thaarups Statistik.

| Aar. | Udgift.<br>Rdr. | Indtægt.<br>Rdr. | Overskud.<br>Rdr. | Tab.<br>Rdr. |
|------|-----------------|------------------|-------------------|--------------|
| 1741 | 220000          | 306000           | 86000             | —            |
| 1742 | 239000          | 321000           | 82000             | —            |
| 1743 | 248000          | 310000           | 62000             | —            |
| 1744 | 237000          | 316000           | 79000             | —            |
| 1745 | 268000          | 330000           | 62000             | —            |
| 1746 | 252000          | 355000           | 103000            | —            |
| 1747 | 285000          | 414000           | 129000            | —            |
| 1748 | 301000          | 288000           | —                 | 13000        |
| 1749 | 298000          | 231000           | —                 | 67000        |
| 1750 | 285000          | 267000           | —                 | 18000        |
| 1751 | 280000          | 283000           | 3000              | —            |
| 1752 | 282000          | 286000           | 4000              | —            |
| 1753 | 285000          | 290000           | 5000              | —            |
| 1754 | 291000          | 288000           | —                 | 3000         |
| 1755 | 275000          | 276000           | 1000              | —            |
| 1756 | 286000          | 298000           | 12000             | —            |
| 1757 | 318000          | 339000           | 21000             | —            |
| 1758 | 327000          | 321000           | —                 | 6000         |
| 1759 | 337000          | 329000           | —                 | 8000         |
| 1760 | 327000          | 316000           | —                 | 11000        |
| 1761 | 338000          | 333000           | —                 | 5000         |
| 1762 | 346000          | 363000           | 27000             | —            |
| 1763 | 358000          | 358000           | —                 | —            |
| 1764 | 352000          | 322000           | —                 | 30000        |
| 1765 | 358000          | 381000           | 23000             | —            |
| 1766 | 366000          | 386000           | 20000             | —            |
| 1767 | 369000          | 363000           | —                 | 6000         |
| 1768 | 368000          | 423000           | 55000             | —            |
| 1769 | 389000          | 361000           | —                 | 28000        |
| 1770 | 400000          | 373000           | —                 | 27000        |
| 1771 | 402000          | 342000           | —                 | 60000        |
| 1772 | 381000          | 300000           | —                 | 81000        |
| 1773 | 366000          | 324000           | —                 | 42000        |
| 1774 | 380000          | 322000           | —                 | 58000        |
| 1775 | 382000          | 224000           | —                 | 158000       |
| 1776 | 362000          | 292000           | —                 | 70000        |
| 1777 | 379000          | 250000           | —                 | 129000       |
| 1778 | 359000          | 296000           | —                 | 63000        |
| 1779 | 339000          | 304000           | —                 | 35000        |
| 1780 | 343000          | 266000           | —                 | 77000        |
| 1781 | 349000          | 282000           | —                 | 67000        |

| Aar. | Udgifter.<br>Rdr. | Indtægter.<br>Rdr. | Overskud.<br>Rdr. | Tab.<br>Rdr. |
|------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------|
| 1782 | 323000            | 282000             | —                 | 41000        |
| 1783 | 343000            | 286000             | —                 | 57000        |
| 1784 | 344000            | 278000             | —                 | 66000        |
| 1785 | 349000            | 305000             | —                 | 44000        |
| 1786 | 345000            | 286000             | —                 | 59000        |
| 1787 | 360000            | 269000             | —                 | 91000        |
| 1788 | 348000            | 227000             | —                 | 121000       |
| 1789 | 350000            | 203000             | —                 | 147000       |
| 1790 | 327000            | 238000             | —                 | 89000        |

## Efter Kraft.

| Aar. | Udgifter.<br>Rdr. | Indtægter.<br>Rdr. | Overskud.<br>Rdr. | Tab.<br>Rdr. |
|------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------|
| 1791 | 354000            | 228000             | —                 | 126000       |
| 1792 | 340000            | 235000             | —                 | 108000       |
| 1793 | 332000            | 264000             | —                 | 65000        |
| 1794 | 335000            | 189000             | —                 | 146000       |
| 1795 | 373000            | 165000             | —                 | 208000       |
| 1796 | 382000            | 197000             | —                 | 185000       |
| 1797 | 354000            | 147000             | —                 | 207000       |
| 1798 | 373000            | 133000             | —                 | 240000       |
| 1799 | 330000            | 156000             | —                 | 174000       |
| 1800 | 282000            | 165000             | —                 | 117000       |
| 1801 | 328000            | 170000             | —                 | 158000       |
| 1802 | 293000            | 124000             | —                 | 169000       |
| 1803 | 269000            | 96000              | —                 | 173000       |
| 1804 | 288000            | 83000              | —                 | 205000       |
| 1805 | 256000            | 133000             | —                 | 123000       |

| Aar. | Indtægt.<br>Spd. | Udgift.<br>Spd. | Overskud.<br>Spd. | Tab.<br>Spd. |
|------|------------------|-----------------|-------------------|--------------|
| 1815 | 3000             | 18000           | —                 | 15000        |
| 1816 | 36000            | 34000           | 2000              | —            |
| 1818 | 70000            | 125000          | —                 | 55000        |
| 1818 | —                | 38000           | —                 | 38000        |
| 1819 | 15000            | 31000           | —                 | 16000        |
| 1820 | 19000            | 22000           | —                 | 3000         |

| Aar. | Indtægt.<br>Spd. | Udgift.<br>Spd. | Overskud.<br>Spd. | Tab.<br>Spd. |
|------|------------------|-----------------|-------------------|--------------|
| 1821 | 63000            | 153000          | —                 | 90000        |
| 1822 | 26000            | 65000           | —                 | 39000        |
| 1823 | 25000            | 66000           | —                 | 41000        |
| 1824 | 34000            | 52000           | —                 | 18000        |
| 1825 | 6000             | 46000           | —                 | 40000        |
| 1826 | 28000            | 49000           | —                 | 21000        |
| 1827 | 34000            | 44000           | —                 | 10000        |
| 1828 | 27000            | 67000           | —                 | 40000        |
| 1829 | 31000            | 47000           | —                 | 16000        |
| 1830 | 80000            | 52000           | 28000             | —            |
| 1831 | 106000           | 66000           | 40000             | —            |
| 1832 | 245000           | 83000           | 162000            | —            |
| 1833 | 231000           | 82000           | 149000            | —            |
| 1834 | 395000           | 79000           | 316000            | —            |
| 1835 | 226000           | 73000           | 153000            | —            |
| 1836 | 317000           | 61000           | 456000            | —            |
| 1837 | 235000           | 95000           | 140000            | —            |
| 1838 | 262000           | 96000           | 166000            | —            |
| 1839 | 315000           | 91000           | 224000            | —            |
| 1840 | 290000           | 93000           | 197000            | —            |
| 1841 | 225000           | 99000           | 126000            | —            |
| 1742 | 194000           | 88000           | 106000            | —            |
| 1843 | 186000           | 89000           | 97000             | —            |
| 1844 | 178000           | 82000           | 96000             | —            |
| 1845 | 166000           | 74000           | 92000             | —            |
| 1846 | 168000           | 57000           | 111000            | —            |
| 1847 | 234000           | 86000           | 148000            | —            |
| 1848 | 342000           | 73000           | 269000            | —            |
| 1849 | 225000           | 84000           | 141000            | —            |
| 1850 | 215000           | 74000           | 141000            | —            |
| 1851 | 172000           | 72000           | 100000            | —            |
| 1852 | 184000           | 76000           | 108000            | —            |
| 1853 | 164000           | 74000           | 90000             | —            |
| 1854 | 233000           | 81000           | 152000            | —            |
| 1855 | 372000           | 92000           | 280000            | —            |
| 1856 | 302000           | 89000           | 213000            | —            |
| 1857 | 224000           | 81000           | 143000            | —            |
| 1858 | 381000           | 91000           | 290000            | —            |
| 1859 | 189000           | 95000           | 94000             | —            |
| 1860 | 168000           | 106000          | 62000             | —            |
| 1861 | 136000           | 108000          | 28000             | —            |
| 1862 | 121000           | 93000           | 28000             | —            |
| 1863 | 130000           | 95000           | 35000             | —            |

| Aar.                 | Indtægt.<br>Spd. | Udgift.<br>Spd. | Overskud.<br>Spd. | Tab.<br>Spd. |
|----------------------|------------------|-----------------|-------------------|--------------|
| 1864 . . .           | 126000           | 95000           | 31000             | —            |
| 1865 . . .           | 153000           | 90000           | 63000             | —            |
| 1866 . . .           | 143000           | 97000           | 46000             | —            |
| 1867 . . .           | 139000           | 102000          | 37000             | —            |
| 1868 . . .           | 153000           | 107000          | 46000             | —            |
| 1869 . . .           | 149000           | 108000          | 41000             | —            |
| 1870 . . .           | 143000           | 96000           | 47000             | —            |
| 1871 . . .           | 142000           | 99000           | 43000             | —            |
| 1872 . . .           | 149000           | 96000           | 53000             | —            |
| 1873 . . .           | 143000           | 104000          | 39000             | —            |
| 1874 . . .           | 136000           | 123000          | 13000             | —            |
| 1875 . . .           | 157000           | 124000          | 33000             | —            |
| 1876 . . .           | 150000           | 125000          | 24000             | —            |
| 1877 . . .           | 168000           | 141000          | 27000             | —            |
| 1878 . . .           | 154000           | 133000          | 31000             | —            |
| <b>1ste Halvaar.</b> |                  |                 |                   |              |
| 1879 . . .           | 32000            | 67000           | —                 | 36000        |
| 1877—80 . .          | 160000           | 124000          | 36000             | —            |
| 1880—81 . .          | 167000           | 129000          | 38000             | —            |
| 1881—82 . .          | 203000           | 125000          | 67000             | —            |
| 1882—83 . .          | 190000           | 122000          | 68000             | —            |
| 1883—84 . .          | 216000           | 134000          | 81000             | —            |

De ovenfor meddelte Tal fra 1740 angiver som berørt ikke Værkets Overskud og Tab for hvert Aar, men hvad Kongens Zahlkasser har givet ud og taget ind.

Variationerne i Værkets Tab og Overskud er voldsommere end hine Tal fra 1700—1740 angiver. Saaledes var fra 1694 til 1723 Værkets Udbringende paa 3 Aar nær (1699, 1709 og 1715) betydelige; Overskuddet udgjorde efter Prætorius 556,000 Rigsdaler. Segen Gottes gav Erts ifra 1693 til 1708. I 1711 under Oberberghauptmand von Vitzthum steg Produktionen af fint Sølv til 15,303 Mark.

Deichman angiver Produktionen saaledes:

|            | Sølv i Mark. | Udgifter.   | Indtægter. | Overskud.  |
|------------|--------------|-------------|------------|------------|
| 1711 . . . | 15303        | 173210 Rdr. | 92370 Rdr. | 80840 Rdr. |

I 1712 produceredes 15490 Mark, i Penge 174157 Rdr.,

og det er sagt, at Vitzthum i disse Aar skaffede et Overskud af 175000 Rdr., som kom vel med i Krigens Tid. Indbetalt i hine to Aar er imidlertid efter Tabellen kun 95000 Rdr.

I 1716 fandtes et overmaade rigt Anbrud i Gabe Gottes Grube, saa at Deichmann angiver Overskuddene i:

|          |             |
|----------|-------------|
| 1717 til | 138000      |
| 1718 —   | 90000       |
| 1719 —   | 80000       |
|          | <hr/>       |
|          | 208000 Rdr. |

Prætorins angiver indbetalt i:

|        |             |
|--------|-------------|
| 1717 — | 66000       |
| 1718 — | 129000      |
| 1719 — | 48000       |
|        | <hr/>       |
|        | 243000 Rdr. |

Sandsynligvis har Værket havt nogen Gjæld, som er betalt af Overskudet, hvad ogsaa Deichman siger.

I Aaret 1717 gav Gabe Gottes 3004 Mark gedigent Sølv, 12350 $\frac{3}{4}$  Pund Mittelerts og 1029 Tønder Scheideerts. Kommissionen af 1833 angiver Gabe Gottes Sølvproduktion til 7942 Mark i 1717 og til 7249 Mark i 1718 (foruden Sølv i Malmen).

Ifra 1722 til 1729 sank Produktionen fra 16712 til 8357 Mark, og Værket kunde ikke klare sig. Fra 1725 til 28 blev Værket forskudt med 124348 Rdr., foruden at der i 1728 var en Gjæld paa 82761 Rdr. Anbrudene vilde ikke forbedre sig og Værket blev udbudt til Salgs, men ingen vilde købe det.

Fra 1732 til 1733 steg Produktionen fra 9279 Mark til 17480 Mark, og holdt sig mellem 12500 og 18000 Mark mellem 1733 og 1740, saa at Værket i 1740 var kvit sin Gjæld. Det synes at have været Segen Gottes Grube og Gottes Hülfe, hvem denne større Produktion skyldes. Segen Gottes, der i 1731 kun gav 474 Mark, leverede i 1732 1159, i det følgende Aar

1249 Mark, og Gottes Hülfes Produktion steg i 1733 —34 fra 376 til 1536 Mark Sølv\*). Fra 1740 foreligger der nøiagtige Opgaver over Værkets Indtægter og Udgifter og Overskud og Tab for hvert enkelt Aar. Helt ifra 1768 var der hvert Aar uafbrudt Tab. Efter Stuckenbrocks Død, som indtraf i 1756, blev Arbeidernes Antal forøget fra 2500 til 4000 i 1771. Det var under Heltzens Bestyrelse, at denne enorme Udvidelse af Driften fandt Sted. Han forøgede Pukværkenes Antal fra 6 til 16, og ikke mindre end 67 Gruber og Skjærp holdtes i Drift. Den høieste Produktion blev naaet i 1768 med 35314 Mark, og da var Arbeidernes Antal 4000. Med en Tiendedel af dette Mandskab naaedes 1833 en Produktion paa 39869 Mark. Efter 1768 tiltrænges, som det vil sees af Tabellerne, et aarligt Tilskud, der naar op helt til 240000 Rigsdaler i 1802, og kjed af de evige Tilskud besluttedes Sølvværkets Nedlæggelse i 1805.

Ved Hjælp af ovenstaaende Tabeller kan vi gjøre op, hvor stort omtrent Overskudet bliver af Kongsberg Sølvværk fra 1623 til 1884:

|                                                     | Overskud.   | Tab.         |
|-----------------------------------------------------|-------------|--------------|
| Fra 1623—1699 Overskud anslaaet til                 | 502000 Rdr. |              |
| Fra 1700—1755 Overskud efter<br>Prætorius . . . . . | 245000 „    |              |
| Fra 1755—1790 Tab efter Thaarup,<br>Tab . . . . .   |             | 1518000 Rdr. |
| Fra 1790—1805 efter Kraft, Tab                      | 2404000 „   |              |
|                                                     | 747000 Rdr. | 3922000 Rdr. |
|                                                     |             | 747000 „     |
| Tabet i Dansketiden fra 1623 til 1805 er altsaa     |             | 3175000 Rdr. |
| Overskud fra 1814—1884 . . . . .                    |             | 5174000 Spd. |

\*) De enkelte Grubers Produktion i ældre Tid angives i gedigent Sølv, Mittelerts og Scheideerts. Sølvet i Malm er ikke med, Grubernes Produktion i Virkeligheden altsaa ikke lidet større.

Til Sammenligning kan anføres, at Kraft angiver det samlede Tab fra 1661—1805 til . . . . . 3417000 Rdr.  
 Trækkes herfra Overskud fra 1623—1661 . . . 417000 „  
 faaes med et rundt Tal Tab 1623—85 . . . 3000000 Rdr.

Forskjellen mellem dette Tab og det ovenstaaende 3175000 Rdr. hidrører vistnok for en Del derfra, at Jernværkernes Tiende i Aarene 1700 til 1755 = 175000 Rdr. maaske er medregnet i Bergkassens Indtægter i Krafts Overslag; tages disse med faaes 3175000 Rdr. som Tab, eller Tallene stemmer akkurat, hvad der imidlertid er en Tilfældighed, da de ældre Tal ikke kan angives med Nøiagtighed.

Hvis man skulde opgjøre Værkets Overskud fra 1623 til 1884, saa maatte der sættes et vist Forhold mellem Rigsdaler og Species. Men ei alene varierer Sølvets Værdi i de forskjellige Aarhundreder, men der sloges i hin Tid et forskjelligt Antal Rigsdaler af hver Mark fint Sølv. I Kristian IVs Tid skulde efter Myntanordningen i Aaret 1624 een lødig Mark holde fint Sølv 15 Lod 2 Qv., og paa hver lødig Mark gik 9 Str. hele Rigsdalere, saa at hin Tids Rigsdaler falder nøie sammen med 1 Spd., af hvilken der udmyntedes  $9\frac{1}{4}$  paa 1 Mark fint Sølv. Senere sloges der Rigsdaler af forskjellig Værdi, til  $11\frac{1}{3}$  Rdr., 12 Rdr. og  $13\frac{1}{3}$  Rigsdaler for hver Mark fint Sølv. (Se Deichman. Om den Kongsbergske Mynt og Sølvværkets Produkter. Danske kongl. Vidensk. Skrifter 11 1877). I nyere Tid efter 1814, da Sølvværket i en Række af Aar trængte Tilskud, er disse regnet efter Spd. i Sedler, medens de senere Tiders Overskud er leveret i fuldgyldig klingende Mynt. At eftergaa Rigsdalerens Værdi til de forskjellige Tider og omgjøre den efter dens Værdi sammenlignet vore Tiders Værdier, vilde blive et vidtløftigt Arbeide. Hvis vi sætter 1 Rigsdaler i forrige Tider lig 1 Spd. i nyere Tid, saa ser vi, at Sølvværkets Overskud fra 1623 til 1884 bliver 2 Millioner Spd. eller 8 Millioner Kroner; fra 1623 til 1885 et Tab af 12 til 13 Mil-

lions Kroner, efter 1814 et Overskud af 20 til 21 Millioner Kroner.

— Af Produktionslisterne og Tabellerne over Tab og Overskud kan Driftsomkostningerne i ældre Tid beregnes. Efter 1740 har man direkte Opgaver over Udgifterne. I de 14 Aar, da Participanterne drev Værket, fra 1628—1641 har de gennemsnitlige Udgifter været 33000 Rigsdaler; i de derpaa følgende Aar synes de at have været i Stigende indtil 50000 Rdr. om Aaret. Da Müller drev Værket fra 1674—83, angives Driftsomkostningerne til 30 til 34000 Rdr. Omkring 1695 til 97 har de atter naaet 50000 Rdr. I 1711 angives Udgifterne til 92370 Rdr., og i 1717 til 1719 har de efter Beregning naaet 100000 Rdr. I 1725—28 fik Værket, trods det at Produktionen ligger imellem 11 og 13000 Mark, Tilskud paa 124000 Rdr. og havde desuden i 1728 en Gjæld paa c. 83000 Rdr. Det fremgaar heraf, at Driftudgifterne nu er voxet til 180000 Rdr. Fra 1741, da direkte Opgaver foreligger, begynder Udgifterne med 220000 Rdr., derpaa stiger de, men ikke jævnt, indtil de naar Maximum med 402000 Rdr. 1771. I dette Aar begynder Bestræbelserne for at faa Budgettet ned, og det synker da langsomt indtil 288000 Rdr. i 1804, det sidste Aar, da Værket var i Drift det hele Aar.

Driftsudgifter ved Sølvværket i forskjellige Aar:

|         |            |      |             |      |            |
|---------|------------|------|-------------|------|------------|
| 1628—41 | 33000 Rdr. | 1750 | 285000 Rdr. | 1830 | 52000 Spd. |
| 1660    | 43000      | 1760 | 327000      | 1840 | 93000      |
| 1670    | 50000      | 1770 | 400000      | 1850 | 47000      |
| 1680    | 34000      | 1780 | 343000      | 1860 | 106000     |
| 1695    | 50000      | 1790 | 327000      | 1870 | 96000      |
| 1711    | 92000      | 1800 | 282000      | 1880 | 124000     |
| 1719    | 100000     | 1804 | 288000      | 1884 | 134000     |
| 1727    | 180000     | 1815 | 18000 Spd.  |      |            |
| 1741    | 220000     | 1820 | 22000       |      |            |

-- Hvis man ser paa hine Tal i Tabellerne (Pag. 221—222) fra 1769 til 1805, der angiver de Beløb, som Regjeringen aarlig



maatte skyde til Driften paa Kongsberg, saa kan det i og for sig ikke forundre, at Staten var kjed af de evindelige Tilskud, -- ikke mindre end over 4 Millioner Rigsdaler i hine 36 Aar -- og at den indstillede Driften. Det laa efter hine langvarige Erfaringer vel nærmest at antage, at selve Sølvets uregelmæssige Forekomst paa Gangene, var den egenlige Aarsag til de stadige Tab. Men strax efter 1814 kom der Udtalelser, der viser, at man allerede i hin Tid tilskrev ogsaa andre Omstændigheder end Fattigdom paa Sølv Aarsagerne til det daarlige Resultat af Driften.

Om Tilstanden ved Værket i Slutningen af forrige og i Begyndelsen af dette Aarhundrede findes der, efter 1814, Udtalelser fra forskjellige Mænd, der havde god Anledning til at gjøre sig bekendt med Forholdene. Medrette blev det ogsaa gjort gjældende, at der paa Kongsberg er udført Arbejder, til Exempel ved Dambygninger og Vandledninger, der har beholdt sin Værdi, hvilket maa komme i Betragtning, naar Værkets Status fra hin Tid opgjøres.

I en Forestilling til Stortinget af 12te Mai 1821 udtaler saaledes Direktør Baumann sig om Driften af Kongsberg Sølvværk og om Aarsagerne til de store Tilskud i tidligere Tid. Han anfører følgende:

Gruberne ligger adspredte paa en Fjeldstrækning af 2 Mil, og hver Grube maatte have sin egen Fordrings- og Pumpemaskine. Der maatte da for at skaffes Vand til Driften inddæmme hele Dalfører med uhyre Stendamme, og Vandet ledes dels i minerede Ledninger, dels paa Mure flere Mil frem til Maskinerne, som skulde bruge dem. Dette er efter Baumann et Arbejde udført for Evigheden, hvis Lige neppe findes ved noget Bergværk i Europa, og som fuldført sikkert har kostet 1 Million gode Dalere. Denne Million bør trækkes fra Værkets Underballance, da Dammene og Vandledningerne kan benyttes uden andre Omkostninger end Vedligeholdelsen. Derhos har Værket maattet underholde Domstole, Bergamtet

og Overbergamtet, der var ligesaameget for det hele Land som for Sølvværket, en Lærestalt under Navnet af Bergseminarium, en for Kongsberg altfor pragtfuld Kirke, alt dette maatte Sølvværket betale. Ogsaa Udgifterne til den endnu ikke fuldførte Christians Stall. »Desuagtet viser Sølvværkets Historie, at det, hvergang det havde virkelig delige Bestyrere, ei alene dreves uden Tab, men ofte endog med betydelig Fordel; havde Værket derimod slette Bestyrere, hvad der desværre altfor ofte var Tilfældet, saa var Tabet ofte meget stort; af en saadan slet Bestyrelse og af en næsten mageløs slet Økonomi hidrørte upaatvivlelig Sølvværkets største Tab«. Saaledes som Maskinerne var bygget af den særdeles delige Stukkenbrock (død 1756) svarede de til Hensigten; de kunde virke tilstrækkeligt paa den da havende Grubernes Dyb; men da disse efterhaanden naede end mere end dobbelt saa stor Dybde, burde ogsaa Maskinerne have været forandrede for at kunne gjøre den fornødne Virkning; men lige indtil Værkets Nedlæggelse forandredes ingen Maskine; lig de gamle byggedes de nye, og Følgen var, at flere Gruber ikke kunde længer forarbeides i Dybet, fordi Vandet ikke kunde holdes ude af dem. Arbeidernes Kræfter blev ikke udnyttede; Arbeiderne skulde ofte gaa  $1\frac{1}{2}$  Mil om Morgenen for at komme til Arbejdsstedet, og de samme Arbeidere var mellem 1 og 2 tilbage paa Kongsberg. Naar hertil lægges den lange og besværlige Vei ned i Gruberne, saa blev liden Tid tilbage til Arbejdet. Til Bevis herpaa anfører Baumann at i de tre sidste Aar, da Værket dreves for Kongens Regning, i 1803, 1804 og 1805 udbragtes 18000 Mark eller 6000 Mark aarlig med 1800 Arbeidere. Siden 1816 havde man derimod med 200 Arbeidere udbragt hver 2000 Mark aarlig.

Efter Værkets Nedlæggelse fortsattes dog en svag Drift i Juliane Marie Grube. Geologen Hausmann, som i 1806 besøgte Kongsberg, angiver, at Juliane Marie Grube og Norske Løve (paa Vinoren) var i Drift, men af alle Overbergets

Gruber blev kun Gamle Justits Grube drevet; kun Juliane Marie dreves for Statens Regning. Den samlede Produktion ifra 1806 til 1815 angives til 38112 Mark (i nogle Opgaver 38012 Mark\*).

— 1814 begyndte man strax at tænke paa Optagelsen af Kongsberg Sølvværk, og der nedsattes en Kommitte af 19de Mai 1815, der foreslog. at Armen Grube skulde optages, og at den dertil fra nye Justits Grube anlagte nordre Del af Kronprinds Frideriks Stol skulde blive fortsat til Gjennemslag, hvortil der efter Kommissionens Overslag vilde udfordres 12000 Spd. at udrede i 3 Aar.

Juliane Marie Grube, der kun i de første Par Aar efter Sølvværkets Nedlæggelse blev drevet med Fordel, og de sidste Aar med betydelig Zubus, foresloges nedlagt. Det anføres, at Gangen i en meget spids Vinkel gennemskjærer de smale, langt fra hinanden liggende Fahlbaand. Gamle Justitsgrube dreves for et Interessentskabs Regning, men var besværet af Vandtilgang fra den nærliggende Armen Grube.

Da Sølvværket blev nedlagt, stod der kun 73½ Lagter tilbage for at træffe den Ort, som fra Armen Grube var drevet den imøde. Armen Grube var da 202 Favne dyb, og Stollen indbragte i 112 Lagters Dyb, saa at der kun vilde behøves Pumper og Fordringsmaskiner til 90 Favne under Stollen. Kommissionen af 1815 siger videre: »Fra Armen Grube til noget nordenfor Gottes Hülfe in der Noth er Overbergets Fahlbaand bredest, og fra de Gruber, som har været blottede i denne Afstand, har Sølvværket i meget lang Tid beholdt den største Mængde af gedigent Sølv og andre smelteværdige Ertzer, ja det er endog en til Vished grændsende Formodning, at nye Sølv gange i denne Tract er at finde, enten ved Skjærpning eller ved Kronprinds Friderichs Stolls Fortsættelse. »Derhos oplyser Kommissionen, at Armen Grube og

\*) Hyttens Overballance fra Aaret 1806 til 1816 har været 133955 Rd. D. C. og fra 1873 til Udgangen af 1814 138067 Rdr. N. V.

end mere Gottes Hülfe in der Noth paa den Tid Værket blev indstillet, ei alene afgav gedigent Sølv og Scheideertz, men den sidste Grube — den sølvrigeste Kongsberg har havt — var da af saa haabefulde Udsigter, som den længe ei havde været.

Den kombinerede Kommitte for Norges Bergvæsen, hvis Formand Aall jun. var, og som bestod af Lovkommitteen med 3 tilkaldte bergkyndige Mænd, ytrer om Kongsberg Sølvværk: »Norges Sølv var i mange forsvundne Aar maaske altfor dyrebart, og Fædrelandet havde været bedre tjent med at indføre det fornødne Sølv i Landet udenlands fra end at fremtvinge det af Kongsberg Gruber med saa uhyre Anstregelser. Da Kongberg Gruber, i geognostisk Henseende, adskilte sig fra alle andre af den Art, saa er Grubedriften i og for sig selv, forbunden med Vanskeligheder, som er ubekjendte paa andre Sølvværker. Saa manguen duelig Bergmand, saa manguen videnskabelig dannet Geognost betragtede de Kongsbergske Gruber, uden at finde andet end usikre og empiriske Spor af en regelmæssig Metal-Formation. En større Ujævnhed af Malm-Rigdom, end den, som finder Sted i de Kongsbergske Gruber, skal neppe kunne tænkes. De ere uformelige Masser, i hvilket Sølvet ligger ujævnt fordelt, og smale, ved hinanden liggende Gange adskilles ved en betydelig Masse af døde Bergarter. Naturen har saaledes forenet sig med ubetænksomme Bestyrere, for at gjøre Grubedriften paa Kongsberg vanskelig og kostbar, og det er maaske et uafgjort Spørgsmaal om Kongsberg Sølvværk, som Metal-Fabrik betragtet, nogensinde mere kan belønne de til Fortsættelsen af dets Drift fornødne Omkostninger — et Haab, som derved end mere vorder tvivlsomt, at Maskinerne ere for en Del nedbrudte, de store Gruber vandfyldte, og de Servituter, hvorved Driften tiiforn opretholdtes, herefter maa ansees mindre gyldige.«

Den kombinerede Kommitte for Norges Bergvæsen af

1815 udtalte sig med største Skarphed om den gamle Drift paa Kongsberg. Den siger: »Hvo, som med Opmærksomhed gjennemgaar Sølvværkets Historie finder alle de Vildfarelser begangne, som ved et Værks Bestyrelse ere mulige. Gubernernes Tilstand røber paa mange Steder en uordentlig og ubjergmæssig Drift. Arbeidsløiet kan vel med Føie regnes blandt det dovneste og mest tyvagtige i den hele Flok af Landets Bjergmænd, og i deres Hytter fandtes næsten altid Armod og Elendighed. Bestyrelsen selv var, formedelst dens Mangler, stedse ilde berygtet. Kabaler, Uredenhed, Herskesyge, Mangel paa praktisk Kundskab herskede idelig, indtil Værkets sidste Dage paa Kongsberg. Føies hertil de uhyre Summer, som ere begravne i dette Svælg, saa maa man vel spørge, om det var muligt, at Bestyrelsen i Privatmands Haand kunde være slettere, Fordelen mindre?«

Det første ordentlige Storthing bevilgede 12000 Spd. til Optagelse af Armen Grube og til Driften af Fredriks Stol.

Efter det andet ordentlige Storthings Forhandlinger Juli 1820 synes der at være foretaget Arbeider i Juls Grube, og det hedder at efter Direktør Baumann vil Gruben med temmelig Vished lønne Omkostningerne.

Efterat Armen Grube var lændset for Vand under Stollorten (før Gjennemslaget), og da Arbeidet skulde begynde fra denne Side, fremkom en dræbende Stank. Der behøvedes 20 Maaneder og kostbare Indretninger for at fordrive denne Stank. Kongens Grube maatte bebygges, fordi ingen Anfaring kunde ske gjennem den med Stank opfyldte Armen Grube. 49 Mennesker blev i denne Tid udbragte som døde, men blev alle reddede.

Kronprinds Fredriks Stol blev gennemslaaet til Armen Grube 1822 om Sommeren.

Den i 1821 nedsatte Kommitte for de offentlige Indretninger paa Kongsberg, Bergraad Collett, Jernværkseier Aall og Direktør Baumann bemærker:

Fredrik Stols Gjennemslag har aabnet sig til flere overfarne Ganges Undersøgelse, men da Stollen tildels ei er dreven paa Fahlbaandene, saasom dens Direktion maatte rettes efter Beliggenheden af de Gruber, som skulde tjene den til Lichtloch (Veirvexling), saa traf man ikke de overfarne Gange i de Baand, hvor de alene kunne ventes at være ertzførende. Gangene maa derfor ved Feltortet til Øster og Vester forfølges, indtil de bekjendte Erzbaand naaes. Neppe vil nogen af disse Undersøgelsesarter paa noget Sted blive mere end 16 Lagter i Længden.«

Kommissionen siger videre: »Armen Grubes Optagelse var ikke Hovedhensigten af det Anlæg, som Kommissionen af 1815 tilraadede, og Stortinget derefter besluttede. Men Hovedhensigten var at gjennemslaa den ufuldendte Del af Kronprinds Fredriks Stol til Armen Grube, og derved bane Veien til Undersøgelsen af det vigtige Felt mellem Armen Grube og Gottes Hülfe in der Noth. Saavidt Armen Grubes Historie er bekjendt, har den ikke hørt blandt Kongsbergs rige Gruber, og Kommissionen af 1815 har og derom givet et Vink, men da denne Grube nu ved Stollens Gjennemslag er bleven tilgængelig, saa bør den og fuldstændig undersøges baade for dens eget Vedkommende, og for derefter at bestemme, enten det mellem Gottes Hülfe in der Noth og Armen Grube liggende Malmfelt skulde vorde fortrinlig undersøgt fra Armen Grube af, eller fra Gottes Hülfe in der Noth — forsaavidt ellers Undersøgelsen i det hele vorder besluttet. Dersom drivværdige Punkter fandtes i Armen Grube, saa skeede Undersøgelsen naturligst og for det første lettest derfra; thi Kraften til at rykke frem i Feltet vandtes under Arbeidet selv.«

Baumann foreslog, at Fredriks Stoll skulde fortsættes til Gottes Hülfe, hvilket Kommissionen ikke kunde tiltræde. Derimod foreslog den Lensningen af Gottes Hülfe. Det anførtes, at naar Gottes Hülfe in der Noth blev optaget, kunde Skjærpet i Nummedal, der hidindtil er drevet uden Tab, og

som ikke giver slette Forhaabninger, tillige fremdeles vorde belagt. Belægget (1824) i Armen Gr. og Stollen var 108 Mand.

Sølvværksdirektøren Baumann bemærker om Optagelsen af Gottes Hülfe: Alene det angivne Øiemeds Opnaaelse med Kronprinds Fredriks Stolls Fortsættelse, nemlig derved, at undersøge Sølvværkets ædleste, aldrig undersøgte Ertzbaand, hvilket er af den Vigtighed, at ingen grundet Dom kan afgives om Sølvværket, førend dette Felt er undersøgt, giver Direktionen tilstrækkelig Grund til ikke at tage i Betænkning at andrage paa Gottes Hülfe in der Noths Grubes Optagelse, uden Hensyn paa selve Gruben, da dennes Lændsning er en ubetinget Nødvendighed, uden hvilken Stollen ikke kan gjennemdrives.

Komiteen for Skog- og Bergvæsenet af 1824 siger: Uagtet den hverken med Hensyn til Kongsbergs Sølvværks Historie og til de nu stedfindende Omstændigheder tør nære synderlig Forhaabning om Kongsbergs Sølvværks Vedvarelse i en fjernere Fremtid, tror Komiteen ei nu at burde tilraade Sølvværkets totale Nedlæggelse, saalænge alt Haab ikke er tabt, og saalænge Fortsættelsen af nogen Virksomhed ved Sølvværket ikke er forbunden med meget betydelige nye Opofrelser. Komiteen indstillede paa Fortsættelse af Drift i Armen Gr., men ikke paa Optagelsen af Gottes Hülfe,

I 1827 foreslog Regjeringen at bortforpagte Sølvværket for 50 Aar, da man var bange for, at Driften stedse vil blive til Tab for Statskassen.

Komiteen for Skog- og Bergvæsen siger i denne Anledning: «Man nærmer sig paa Dybet Overskjæringslinien af Kongens og Armen Grube, som om 5 å 6 Aar forhaabentlig vil kunne bevirkes og, naar dette sker, haves Haab om et rigere Udbytte i Analogi med, hvad sædvanlig har fundet Sted ved Grube-Tilfælde af denne Art.»

Komiteen troede derfor at burde bevilge den foreslaede Sum til Armen Grubes Drifts Fortsættelse, men den ytrer tillige den Formening, at »dette Forsøg bør være det sidste,

og at ikke flere Opofrelser bør gjøres, dersom Armen Grube, ogsaa i næste Mellemlum af 3 Aar udebliver, foruden den Sum af 4000 Spd. aarligen, som sædvanligen dertil er tilstaaet, at fortære alle andre Fordele paa Kongsberg, uagtet de givne gode Forhaabninger om dens Drift.

Storthinget bifaldt ikke Forslaget om Bortforpagtning, men bemyndigede Regeringen til at sælge Sølvværket om Leilighed gaves i de følgende 3 Aar.

I 1830 begyndte Gruberne at give mere Sølv. I de tre første Maaneder af 1830 gav saaledes Armen og Kongens Grube 1851 Mark gedigent Sølv, hvilket udgjør 1500 Mark fint Sølv, medens disse Drifter fra Begyndelsen af 1827 til Midten af 1829 (i  $2\frac{1}{2}$  Aar altsaa) kun gav 1552 Mark. Der arbeidedes de med 70 til 80 Mand i 2 Gruber. Storthinget i 1830 bevilgede til Fortsættelse af Driften, men besluttede at sætte Værket under Auktion i 1831, saaledes at et Minimumsbud paa 75000 Spd. skulde antages. Det er her ikke Stedet at kritisere denne Beslutning. I Aschenbergs og Mariebos Vota kommer Argumenterne for og imod Salg klart frem. I denne for Sølvværket kritiske Tid, da Værket havde været drevet med Tab fra 1768 til 1805 og fra 1815 til 1830, var det ikke at undres over, at mange blev utaalmodige.

Aschenberg gjorde i et særskilt Votum medrette gjældende, at det var uklogt at sælge Værket for 75000 Spd. (Skovene alene var værd 25000 Spd.), efterat Fredriks Stol var gjennemslaaet, Armen Gr. lændset, og efterat der i 1830 allerede var vundet 3900 Mark.

Maribo derimod fremhævede, i sit Votum, at man handlede mest overensstemmende med Nationens Tarv, naar man ikke lod sig blænde af det Sølv, Armen Gr. i den senere Tid har afgivet, men stedse havde saavel det ældre som det nyere Sølvværks Historie for Øie, og ikke ved Beretninger om de mange Hundrede Mærker Sølv, som nu ugentlig vindes, glemte de uhyre Summer, Kongsbergs Sølvværk har opslugt, og at



det var paa høi Tid, ligesom ogsaa den mest passende Tid, at forlade Bergmandshaabet og befri Skatteborgerne fra fremdeles at maatte bidrage til dette underjordiske Lotteri.«

— Ved den efter Stortingets Beslutning i 1831 afholdte Auktion blev intet Bud gjort, men ved Auktion i 1832 blev 75000 Spd. budt af Kjøbmand A. Solem, hvilket ikke blev approberet, da det med Hensyn til de daværende Udsigter for Sølvværkets Drift ansaaes for uantageligt. Anbrudene var nemlig paa denne Tid saa rige, at der neppe kunde være Tvivl om, at der var Sølv for mere end Salgssummen<sup>1)</sup>.

Direktionen anfører i sin Beretning til Regjeringen 1832 følgende: Kongens Grubes Drift var den 12te Marts 1832 15 Lagter dyb under Langorten Sohle, saaledes 3 Lagter under Skjoldborgortens Sohle — at Afsynkningen er senere under tiltagende Ædelhed fortsat indtil 6 $\frac{3}{4}$  Lagters Dyb under sidstnævnte Sohle, da den i 13de Bergmandsmaaneds sidste Uge har gjort Gjennemslag til Fyrsten i nederste Qverslag mod Nord, Bergraad-Orten kaldet — at det projekterede Qverslag til Nord fra Armen Grubes Hovedgesænk til Kongens Grubes Drifts Gang, blev dreven med saa overordentlig Anstrengelse, at man allerede den 1ste Februar 1832 havde naaet Gangen, der ogsaa i Dybet viste stor Ædelhed — at Gangen hele forrige Aar ved Udlænkninger med Fyrsætning til Øst og Vest, samt ved tillige at brænde paa Fyrsten har givet en stor Mængde gedigent Sølv, rig Mittelertz og Scheideertz, samt megen og god Pukmalm.

Direktionen anfører derefter, at da Kongens-Grube-Driftens Gesænk, som foran nævnt, slog durch i Bergraad-Ortens Fyrst, udbrødes ved første Durchhulskud Sølvklumper, Mittelertz, Scheideertz i saadan Mængde, at der den paafølgende Lørdag leveredes til Hytten 2050 Mark gedigent Sølv, hvilket

<sup>1)</sup> Saavidt jeg ved, var hint Bud paa 75000 Spd., fremsat af Kjøbmand Solem, gjort af et Selskab bestaaende af Haugianere, et Parti, hos hvem de religiøse Interesser i ikke ringe Grad var forenet med Foretagsomhed og Interesse for Spekulation.

maa ansees som en særdeles mindeværdig Hændelse ved dette Bergværk, og hentyder paa stor Ædelhed i Gang og Baand, som endnu er at se, da Ertzen staar dærb til alle Sider ved Durchslagets Udvidelse, og giver fremdeles en Mængde gedigent Sølv og rige Ertzer.

De foran anførte Lister viser den betydelige Stigning i Produktionen:

|            |            |
|------------|------------|
| 1830 . . . | 7288 Mark. |
| 1831 . . . | 8426 —     |
| 1832 . . . | 18296 —    |
| 1833 . . . | 39869 —    |
| 1834 . . . | 24275 —    |
| 1835 . . . | 19814 —    |
| 1836 . . . | 25848 —    |

Som det bedste Exempel paa, hvorledes disse Gange i faa Aar kan betale lang Tids Tilskud hidsættes følgende:

Ved Udgangen af 1830 stod til Rest, hvad Sølvværket havde oppebaaret af Statskassen mere end bevilget

9435 Spd.

Af de bevilgede Summer . . . . . 116089 —

. . . . . tilsammen 125524 Spd.

Ved Udgangen af 1832 havde Sølvværket betalt disse og havde et Overskud af . . . . . 15527 Spd.

5te Bergmaaned 1833 havde Sølvværket

leveret Sølv til Hytten for . . . . . 238970 —

Modtaget af Zahlkassen . . . . . 27841 —

Overskud 211129 Spd.

tilsammen Overskud . . . . . 226656 —

Saaledes havde Sølvværket fra 1ste Januar 1830 til Udgangen af 5te Bergmaaned 1833 betalt Tabet siden 1816 og desuden leveret et Overskud paa 227656 Spd.; desuden havde det 20060 Spd. tilgode af Mynten og en Beholdning af Ertser og Malmer af meget betydelig Værdi.

Det vil af Tabellerne Pag. 222—223 fremgaa, at Kongsbergs Sølvværk fra 1815 til 1829 har faaet et Tilskud af Statskassen af 440000 Spd. i Sedler; af disse 440000 Spd. skal imidlertid 220000 Spd. være medgaaet til Pensioner og andre ved Sølvværkets Nedlæggelse i 1805 forbundne Udgifter; den virkelige Udgift til Sølvværket fra 1815 til 1830 udgjør efter ovenstaaende Regnskab 125524 Spd.

— I 1833 besluttedes nedsat en Kommission, der opgjorde den Plan for Sølvværkets Drift, som endnu følges. Armen Grube blev, som før omtalt, optaget i 1815, og Fredriks Stol, der indbringer i denne Grube i et Dyb af 112 Lagter, besluttet laaet igjennem. Gjennemslag fandt Sted i 1822. Armen og Kongens Grube, hvis Drifter ligger nær hverandre og gaar i hverandre, var saaledes de eneste Gruber, som var i Drift indtil denne Tid.

Kommissionen af 1833 foreslog Optagelsen af Gottes Hülfe in der Noth samt Fortsættelsen af Driften af Kristians Stol. Denne Stol, der indbringes i et Dyb af 52 Lagter under Fredriks Stol i Armen Grube, var som tidligere omtalt foreslaaet af Berghauptmand Hjorth. Det var den gamle storartede Plan, at denne Stol skulde gaa gjennem hele Overberget fra Nord til Syd ifra Kobberberg-Elvens til Jondalselven, en Længde af 4330 Lagter eller 27785 Fod. I Slutningen af Aaret 1798, var denne Stol fra den søndre Dagmunding inddrevet 458 Lagter, fra den nordre 419. Sandsynligvis paa Grund af Veirskakternes Kostbarhed og paa Grund af Vanskeligheder med Veirvexlingen indstillede Brünnich ganske Arbeidet i Kristians Stol 1804, efterat han i 1792 havde paabegyndt den 52 Lagter høiere liggende Fredriks Stol. Kristians Stol var i 1803 inddrevet 473 Lagter fra søndre Side. Heller ikke Fredriks Stol var slaaet igjennem, da Sølvværket blev nedlagt, men den blev først slaaet igjennem i 1822 som ovenfor berørt. Kommissionen af 1833 foreslog, at

Kristians Stol skulde fortsættes foreløbigt til Gottes Hölfe in der Noth.

— Den besluttede Lensning af Gottes Hülfe in der Noth blev udført fra 12te Bergmaaned 1840 til 2den Maaned 1844. Gruben var fyldt med Vand til Ilse Stol og lensedes under denne Stols Niveau indtil et Dyb af 153 Lagter. Gruben havde et Vandhindhold af omtrent 5 Millioner Kubikmeter Vand. Lensningen, der som berørt udførtes i  $3\frac{1}{2}$  Aar, kostede 89747 Spd.

Brünnich angiver som før omtalt at Stollen i 1793 var inddrevet 453 Lagter fra Syd og 419 Lagter fra Nord og skulde efter Regnskaberne kostet med tilhørende Veirskakter 241138 Rdr. 32 Sk.

Kommissionen af 1833 bemærker, at efter en summarisk Beregning havde de til Aaret 1803 incl. inddrevne 473 Lagter af den søndre Del af Stollen ikkun kostet 22829 Rdr. 9 Sk. D. C. for det egentlige Stolarbeide, eller for en Lagters Inddrivning 49 Rdr. 29 Sk. D. C.

Stollen sloges igjennem mellem Justits Skjærp og Armen Grube den 7de Juni 1855, mellem Kongens Grube og Gottes Hülfe i 1865.

Afstanden fra den nordre Stolorts Skram til Svarte Thorstein udgjorde 89 Lagter, og den blev slaaet igjennem til denne Grube i 1862; her er inddrevet:

|                                           |          |         |
|-------------------------------------------|----------|---------|
| Fra Dagmunden til Kronprinds Fredrik      | . 303.56 | Lagter. |
| — Kronprinds Fredrik til Svarte Thorstein | . 243.48 | —       |

---

547.04 Lagter.

|                                                      |        |         |
|------------------------------------------------------|--------|---------|
| Afstanden fra Søndre Dagmunding til Justits Skjærper | 524.70 | Lagter. |
|------------------------------------------------------|--------|---------|

|                                    |        |   |
|------------------------------------|--------|---|
| — « Justits Skjærp til Armen Grube | 570.78 | — |
| — « Armen Grube til Kongens Grube  | 29.13  | — |
| — « Kongens Grube til Gottes Hülfe | 665.65 | — |

---

1790.26 Lagter.

Herfra er den nu (1885) inddrevet noget over 300 Lagter, saa at dens samlede Længde nu udgjør 2090 Lgt., og naar hine 547 Lagter fra Nord lægges til 2637 Lgt.

Udgifterne ved Kristians Stols Drift har udgjort efter Driftsberetning 1865:

- |                                                                                                                                                                                       |                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| a. Forberedende Arbeide med Ryddiggjørelse af den gamle Stoll fra Sauggrønden til Justits Skjærp i Aarene 1834—38 (hvoriblandt Lensningen af Justitsskjærp (6425 Spd.) ialt . . . . . | 11575 Spd. 36 Sk. |
| b. Fremdrift af den nye Stoll fra Justits Skjærp til Gottes Hülfe in der Noth, en Længde af 1227 Lagter i Aarene 1839—1865, ialt . . . . .                                            | 134844 „ 9 „      |
| c. Skraaplanet mellem Kongens og Armen Grube . . . . .                                                                                                                                | 5378 „ 9 „        |
| tilsammen 151797 Spd. 54 Sk.                                                                                                                                                          |                   |

Heri er ikke indbefattet Fortsættelsen af Stollen fra Nord mod Syd fra Jondalen til Svarte Thorstein og denne Grubes Lensning, nemlig 19435 Spd. 85½ Sk. Stollen har været i Drift 200 Bergmaaneder eller 15 $\frac{2}{3}$  Aar; den paabegyndtes 1ste Juli 1843; den standsedes i 3 $\frac{2}{3}$  Aar efter Forslag af Kommission af 1851.

Den Del af Stollen, der gaar fra Kongens Grube ind til Gottes Hülfe, er lagt i et 7½ Lagter høiere Niveau end Stollen søndenfor Kongsberg Grube. Paa Grund af dette Feilgreb gjør Stollen mindre god Tjeneste som Fordringsstol, og den indbringer i Gottes Hülfe og vil indbringe i Hans Sachsen i et mindre Dyb, end den kunde have gjort, om hint uheldige Knæ havde været borte. Paa Grund af de Ulemper, som var forbundne med Knæet, blev Stollens Drift fra syd standset i 3 Aar, og Stollen fra Nord slaet igjennem til Svarte Torstein med en Bekostning af 19345 Spd. Derefter indstilledes Driften fra nord, og man tog atter fat paa Stollen fra syd, og slog denne igjennem til Gottes Hülfe.

Ved Storthingsbeslutning af 11te Mai 1854 blev det bestemt, at der af Værkets Overskud skulde skaffes et Driftsfond tilveie paa 1 Million Spd., af hvilket Fond Renterne skal anvendes til Driftsomkostninger, naar Værket drives med Tab.

I 1865 nedsattes der atter en Kommission til Forslag om Drift af Sølvværket. Denne foreslog, at Haus Sachsen Grube skulde optages, og at Kristians Stol skulde fortsættes til Haus Sachsen. Afstanden fra Gottes Hülfe til Haus Sachsen er ikke  $630\frac{3}{4}$  Lagter, (som Kommissionen af 1833 angiver) men efter Bøbert 485 Lagter. Efter Driftsberetning for 1833—84 var Stollen inddrevet 597.98 Meter fra Gottes Hülfe. Der staar altsaa tilbage at inddrive omtrent 185 Lagter, hvilket efter et aarlig Avancement af 16 Lagter vil være fuldført om 11 a 12 Aar.

— Nedenstaaende Tabel viser, hvormeget Sølv der er udvundet af hver af de tre Gruber Armen og Kongens Grube, Gottes Hülfe og Haus Sachsen i Aarene 1859—1884, samt angiver de Udgifter, som er anvendte til Bergbygningsarbejderne ved de enkelte Gruber, og det anvendte Mandskab. Sølv-mængden er den Mængde Sølv, som er leveret fra Pukværkerne dels i Form af gedigent Sølv, dels indeholdt i Sligerne.

## Fortegnelse over Sølvproduktion fra 1859 til 1/4 1884.

|              | Armens og Kongens Gr.                        |                   |           | Gottes Hülfe in der Noth.                    |                   |           | Haus Sachsen.                                |                   |           |
|--------------|----------------------------------------------|-------------------|-----------|----------------------------------------------|-------------------|-----------|----------------------------------------------|-------------------|-----------|
|              | Produkter med Indhold af fint Sølv.<br>Mark. | Udgifter.<br>Spd. | Mandskab. | Produkter med Indhold af fint Sølv.<br>Mark. | Udgifter.<br>Spd. | Mandskab. | Produkter med Indhold af fint Sølv.<br>Mark. | Udgifter.<br>Spd. | Mandskab. |
| 1859         | 15929                                        | 36000             | 182       | 5420                                         | 16000             | 90        |                                              |                   |           |
| 1860         | 14288                                        | 36000             | 185       | 3699                                         | 19000             | 92        |                                              |                   |           |
| 1861         | 13926                                        | 37000             | 183       | 1889                                         | 20000             | 104       |                                              |                   |           |
| 1862         | 12577                                        | 35000             | 179       | 1368                                         | 20000             | 97        |                                              |                   |           |
| 1863         | 10578                                        | 35000             | 195       | 1930                                         | 17000             | 96        |                                              |                   |           |
| 1864         | 12022                                        | 36000             | 182       | 2636                                         | 17000             | 92        |                                              |                   |           |
| 1865         | 11099                                        | 32000             | 180       | 2380                                         | 18000             | 97        |                                              |                   |           |
| 1866         | 13580                                        | 37000             | 176       | 1980                                         | 19000             | 94        |                                              | 300               | 13        |
| 1867         | 16461                                        | 35000             | 165       | 1256                                         | 15000             | 77        |                                              | 6000              | 16        |
| 1867         | 16274                                        | 33000             | 160       | 885                                          | 19000             | 82        |                                              | 8000              | 28        |
| 1869         | 14117                                        | 39000             | 171       | 1521                                         | 15000             | 77        |                                              | 10000             | 29        |
| 1870         | 14321                                        | 37000             | 165       | 3496                                         | 15000             | 79        |                                              | 5000              | 25        |
| 1871         | 14327                                        | 37000             | 170       | 2290                                         | 14000             | 76        |                                              | 7000              | 24        |
| 1872         | 11470                                        | 37000             | 164       | 2646                                         | 14000             | 73        |                                              | 5000              | 25        |
| 1873         | 11797                                        | 40000             | 160       | 1643                                         | 14000             | 70        |                                              | 6000              | 26        |
| 1874         | 13849                                        | 45000             | 159       | 1187                                         | 20000             | 73        |                                              | 7000              | 24        |
| 1875         | 15439                                        | 44000             | 149       | 1431                                         | 20000             | 72        |                                              | 8000              | 27        |
| 1876         | 19773                                        | 46000             | 154       | 1303                                         | 19000             | 71        | 653                                          | 9000              | 33        |
| 1877         | 21431                                        | 46000             | 156       | 1054                                         | 21000             | 72        | 389                                          | 10000             | 28        |
| 1878         | 21552                                        | 45000             | 161       | 864                                          | 19000             | 66        | 765                                          | 9000              | 30        |
| 1ste Halvaar |                                              |                   |           |                                              |                   |           |                                              |                   |           |
| 1879         | 9266                                         | 21000             | 167       | —                                            | 9000              | 68        | —                                            | 4000              | 32        |
| 1879—80      | 19478                                        | 40000             | 159       | 2108                                         | 19000             | 64        | 1069                                         | 9000              | 30        |
| 1880—81      | 14475                                        | 42000             | 153       | 2784                                         | 20000             | 66        | 1839                                         | 10000             | 37        |
| 1881—82      | 20119                                        | 38000             | 143       | 2673                                         | 19000             | 62        | 6637                                         | 11000             | 44        |
| 1882—83      | 24835                                        | 35000             | 132       | 1779                                         | 18000             | 61        | 5632                                         | 13000             | 48        |
| 1883—84      | 19576                                        | 38000             | 128       | 2279                                         | 19000             | 70        | 4015                                         | 13000             | 46        |

Det fremgaar af disse Tal, at det er Armen og Kongens Grube, som har leveret det største Kvantum Sølv i denne Aarrække, og at det er fra denne Grube, at Værket har sit store Overskud i hine Aar. Gottes Hülfe, der i gammel Tid var Værkets Hovedgrube, staar stadigt tilbage for Armen og Krongens Grube. Den sidst optagne Grube Haus Sachsen har i de sidste Aar leveret meget mere Sølv end Gottes Hülfe in der Noth.

Hvis vi vil sammenligne Grubernes nuværende Produktion med Produktionen i gammel Tid, saa kan imidlertid ovenstaaende Tal ikke benyttes, fordi vi fra forrige Aarhundrede kun har Opgaver over, hvad der er leveret til Pukværkerne i Form af gedigent Sølv, Mittelerts og Scheideerts. Tager vi disse Tal og sammenligner med, hvad de enkelte Gruber har leveret i gedigent Sølv til Hytten, saa gaar det an at anstille en Sammenligning. Efter de Tal, som Kommissionen af 1833 angiver, hidsættes her nogle Produktionslister af gedigent Sølv, og senere de enkelte Grubers Produktion af gedigent Sølv i vor Tid.



Produktion af Sølv i gedigent Sølv, Scheideerts og Mittelerts  
i enkelte Gruber fra 1700—1790.

|      | Segen Gottes.<br>Mark | Gabe Gottes.<br>Mark | Gamle Justits.<br>Mark | Armen Grube.<br>Mark | Kongens<br>Grube.<br>Mark | Gottes Hülfe.<br>Mark | Sachsen.<br>Mark | Kronprinds<br>Grube.<br>Mark | Kronprinds<br>Fredericks Gr.<br>Mark | Juliane Marie.<br>Mark |
|------|-----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------|------------------------------|--------------------------------------|------------------------|
| 1700 | 147                   | 13                   |                        | 126                  | 50                        | 53                    | 187              |                              |                                      |                        |
| 1701 | 398                   | 11                   |                        | 68                   | 352                       | 37                    | 103              |                              |                                      |                        |
| 1702 | 885                   | 22                   |                        | 75                   | 252                       | 25                    | 267              |                              |                                      |                        |
| 1703 | 333                   | 18                   |                        | 26                   | 226                       | 35                    | 89               |                              |                                      |                        |
| 1704 | 1228                  | 11                   |                        | 47                   | 645                       | 1                     | 28               |                              |                                      |                        |
| 1705 | 2393                  | 97                   |                        | 144                  | 943                       |                       | 19               |                              |                                      |                        |
| 1706 | 1083                  | 48                   |                        | 78                   | 651                       | 18                    | 52               |                              |                                      |                        |
| 1707 | 849                   | 26                   |                        | 45                   | 439                       | 92                    | 122              |                              |                                      |                        |
| 1708 | 1465                  | 273                  |                        | 48                   | 912                       | 114                   | 416              |                              |                                      |                        |
| 1709 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                      |                        |
| 1710 | 458                   | 532                  |                        | 53                   | 156                       | 102                   | 180              |                              |                                      |                        |
| 1711 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                      |                        |
| 1712 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                      |                        |
| 1713 | 16                    | 989                  |                        | 2                    | 371                       | 18                    | 166              | 49                           |                                      |                        |
| 1714 | 11                    | 1553                 |                        | 16                   | 970                       | 238                   | 128              | 157                          |                                      |                        |
| 1715 | 80                    | 1176                 |                        | 166                  | 654                       | 61                    | 77               | 163                          |                                      |                        |
| 1716 | 290                   | 2212                 |                        | 94                   | 704                       | 122                   | 174              | 41                           |                                      |                        |
| 1717 | 45                    | 7943                 |                        | 136                  | 1215                      | 42                    | 131              | 87                           |                                      |                        |
| 1718 | 19                    | 7250                 |                        | 40                   | 824                       | 44                    | 133              | 342                          |                                      |                        |
| 1719 | 18                    | 990                  |                        | 47                   | 2124                      | 23                    | 337              | 1040                         |                                      |                        |
| 1720 | 14                    | 935                  |                        | 34                   | 1015                      | 63                    | 1757             | 675                          |                                      |                        |
| 1721 | 21                    | 445                  |                        | 56                   | 1375                      | 133                   | 2901             | 679                          |                                      |                        |
| 1722 | 158                   | 520                  |                        | 44                   | 539                       | 331                   | 5203             | 819                          |                                      |                        |
| 1723 | 29                    | 565                  |                        | 41                   | 411                       | 102                   | 3235             | 1050                         | 9                                    |                        |
| 1724 | 136                   | 781                  |                        | 76                   | 183                       | 287                   | 1383             | 457                          | 11                                   |                        |
| 1725 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                      |                        |
| 1726 | 301                   | 617                  |                        | 13                   | 205                       | 2416                  | 1957             | 433                          | 4                                    |                        |
| 1727 | 68                    | 477                  |                        | 18                   | 360                       | 275                   | 945              | 1546                         | 29                                   |                        |
| 1728 | 117                   | 296                  |                        | 1                    | 495                       | 265                   | 575              | 74                           |                                      |                        |
| 1729 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                      |                        |
| 1730 | 383                   | 238                  |                        | 58                   | 943                       | 406                   | 209              | 910                          |                                      |                        |
| 1731 | 474                   | 296                  |                        | 35                   | 434                       | 410                   | 464              | 170                          |                                      |                        |
| 1732 | 1159                  | 134                  |                        | 31                   | 366                       | 490                   | 730              | 246                          |                                      |                        |
| 1733 | 1247                  | 724                  |                        | 136                  | 795                       | 376                   | 513              | 72                           | 396                                  |                        |
| 1734 | 1777                  | 399                  |                        | 75                   | 399                       | 1536                  | 198              | 41                           | 826                                  |                        |
| 1735 | 1561                  | 25                   |                        | 49                   | 1325                      | 1006                  | 393              | 66                           | 530                                  |                        |

|      | Segen Gottes.<br>Mark | Gabe Gottes.<br>Mark | Gamle Justits.<br>Mark | Armen Grube.<br>Mark | Kongens<br>Grube.<br>Mark | Gottes Hülfe.<br>Mark | Sachsen.<br>Mark | Kronprinds<br>Grube.<br>Mark | Kronprinds<br>Fredriks Gr.<br>Mark | Juliane Marie.<br>Mark |
|------|-----------------------|----------------------|------------------------|----------------------|---------------------------|-----------------------|------------------|------------------------------|------------------------------------|------------------------|
| 1736 | 966                   |                      |                        | 59                   | 247                       | 826                   | 215              | 42                           | 1232                               |                        |
| 1737 | 938                   | 74                   |                        | 49                   | 329                       | 3627                  | 266              | 22                           | 271                                |                        |
| 1738 | 1161                  | 60                   |                        | 28                   | 646                       | 7330                  | 250              | 8                            | 420                                |                        |
| 1739 | 821                   | 7                    |                        | 10                   | 424                       | 7126                  | 652              |                              |                                    |                        |
| 1740 | 404                   | 9                    |                        |                      | 221                       | 4281                  | 571              |                              |                                    |                        |
| 1741 | 375                   | 12                   |                        | 38                   | 161                       | 6393                  | 550              |                              |                                    |                        |
| 1742 | 403                   | 24                   |                        | 115                  | 410                       | 4568                  | 214              |                              |                                    |                        |
| 1743 | 542                   | 25                   |                        | 18                   | 394                       | 2694                  | 253              |                              |                                    |                        |
| 1744 | 1202                  | 152                  |                        | 12                   | 218                       | 3562                  | 251              |                              |                                    |                        |
| 1745 | 1311                  | 134                  |                        | 15                   | 314                       | 1082                  | 197              |                              |                                    |                        |
| 1746 | 1949                  | 88                   |                        | 13                   | 204                       | 2432                  | 286              |                              |                                    |                        |
| 1747 | 1614                  | 143                  |                        | 25                   | 111                       | 3745                  | 279              |                              |                                    |                        |
| 1748 | 1331                  | 52                   |                        | 15                   | 41                        | 2962                  | 277              |                              |                                    |                        |
| 1748 | 1267                  | 46                   |                        | 13                   | 36                        | 2950                  | 167              |                              |                                    |                        |
| 1750 | 752                   | 51                   |                        | 54                   | 40                        | 2185                  | 167              |                              |                                    |                        |
| 1751 | 743                   | 53                   |                        | 83                   | 42                        | 1942                  | 236              |                              |                                    |                        |
| 1752 | 411                   | 51                   |                        | 135                  | 50                        | 2007                  | 184              |                              |                                    |                        |
| 1753 | 620                   | 51                   |                        | 50                   | 64                        | 2133                  | 164              |                              |                                    |                        |
| 1754 | 473                   | 53                   |                        | 46                   | 20                        | 2000                  | 163              |                              |                                    |                        |
| 1755 | 479                   | 173                  |                        | 101                  | 45                        | 2800                  | 219              |                              |                                    |                        |
| 1756 | 488                   | 236                  |                        | 79                   | 34                        | 3267                  | 237              |                              |                                    |                        |
| 1757 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1758 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1759 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1760 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1761 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1762 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1763 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1764 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1765 |                       |                      |                        |                      |                           |                       |                  |                              |                                    |                        |
| 1766 | 557                   | 238                  | 536                    |                      |                           | 5514                  | 576              |                              |                                    | 214                    |
| 1767 | 683                   | 299                  | 490                    |                      |                           | 2683                  | 806              |                              |                                    | 177                    |
| 1768 | 750                   | 36                   | 256                    |                      |                           | 5667                  | 784              |                              |                                    | 137                    |
| 1769 | 836                   | 361                  | 560                    |                      |                           | 5569                  | 861              |                              |                                    | 237                    |
| 1770 | 703                   | 384                  | 644                    |                      |                           | 3573                  | 986              |                              |                                    | 483                    |
| 1771 | 474                   | 398                  | 435                    |                      |                           | 2381                  | 969              |                              |                                    | 248                    |

|                                                                             | Segen Gottes.<br>Mark | Gabe Gottes.<br>Mark | Gamle Justits.<br>Mark                 | Armens Grube.<br>Mark             | Kongens<br>Grube.<br>Mark              | Gottes Hülfe.<br>Mark                  | Sachsen.<br>Mark | Kronprinds<br>Grube.<br>Mark | Kronprinds<br>Fredericks Gr.<br>Mark | Juliane Marie.<br>Mark |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------|----------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|------------------|------------------------------|--------------------------------------|------------------------|-----|
| 1772                                                                        | 552                   | 662                  | 32                                     | 828                               | } anført<br>under<br>Ar-<br>men<br>Gr. | 3094                                   | 1118             |                              |                                      | 207                    |     |
| 1773                                                                        | 455                   | 582                  | 380                                    | 725                               |                                        | 3562                                   | 644              |                              |                                      | 341                    |     |
| 1774                                                                        | 404                   | 76                   | 540                                    | 740                               |                                        | 2071                                   | 711              |                              |                                      | 288                    |     |
| 1775                                                                        | 353                   | 57                   | 1250                                   | } anført<br>under<br>Just.<br>Gr. |                                        | 1729                                   | 538              |                              |                                      | 116                    |     |
| 1776                                                                        | 586                   | 287                  | 1118                                   |                                   |                                        | 2449                                   | 371              |                              |                                      | 149                    |     |
|                                                                             |                       |                      |                                        |                                   |                                        |                                        |                  |                              |                                      | 115                    |     |
| 1777                                                                        | 559                   | 227                  | } anført<br>under<br>Ar-<br>men<br>Gr. | 994                               |                                        | } anført<br>under<br>Ar-<br>men<br>Gr. | 4017             | 284                          |                                      |                        |     |
| 1778                                                                        | 92                    | 14                   |                                        | 905                               |                                        |                                        | 4406             | 206                          |                                      |                        | 91  |
| 1779                                                                        | 578                   | 156                  | 442                                    | 461                               |                                        |                                        | 7119             | 241                          |                                      |                        | 141 |
| 1780                                                                        | 743                   | 201                  | 384                                    | 1084                              |                                        |                                        | 4719             | 216                          |                                      |                        | 210 |
|                                                                             |                       |                      |                                        |                                   |                                        |                                        |                  |                              |                                      |                        |     |
| 1781                                                                        | 320                   | 319                  | 1590                                   | } anført<br>under<br>Just.<br>Gr. |                                        |                                        | 5380             | 201                          | 25                                   |                        | 110 |
| 1782                                                                        | 354                   | 128                  | 2052                                   |                                   |                                        |                                        | 5126             | 275                          |                                      |                        | 253 |
| 1783                                                                        | 271                   | 130                  | 530                                    | 805                               |                                        |                                        | 5012             | 234                          |                                      |                        | 411 |
| 1784                                                                        | 249                   | 111                  | 506                                    | 962                               |                                        |                                        | 3898             | 159                          |                                      | 9                      | 773 |
| 1785                                                                        | 227                   | 116                  | 308                                    | 1041                              | 5688                                   |                                        | 105              |                              | 75                                   | 320                    |     |
| 1786                                                                        | 266                   | 228                  | 354                                    | 789                               | 6056                                   |                                        | 119              |                              | 122                                  | 213                    |     |
| 1787                                                                        | 270                   | 192                  | 473                                    | 907                               | 5854                                   |                                        | 153              |                              | 135                                  | 195                    |     |
| 1788                                                                        | 151                   | 153                  | 395                                    | 1047                              | 3523                                   |                                        | 335              |                              | 173                                  | 456                    |     |
| 1789                                                                        | 160                   | 180                  | 388                                    | 619                               | 3115                                   |                                        | 234              | 3                            | 380                                  | 297                    |     |
| 1790                                                                        | 229                   | 179                  | 375                                    | 623                               | 2443                                   |                                        | 777              |                              | 2947                                 | 191                    |     |
| 46239   36821   14037   15765   24384   183685   40774   9809   8375   6371 |                       |                      |                                        |                                   |                                        |                                        |                  |                              |                                      |                        |     |

Antallet af Lod er udeladt i disse Lister.

### Produktion af gedigent Sølv i Mark fra 1859—60.

|                      | Armen og Kongens Gr.<br><br>Grovt og<br>gedigent Sølv. | Gottes Hülfe in der Noth.<br><br>Grovt og<br>gedigent Sølv. | Haus Sachsen.<br><br>Grovt og<br>gedigent Sølv. |
|----------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1859                 | 11458                                                  | 3917                                                        |                                                 |
| 1860                 | 10060                                                  | 2567                                                        |                                                 |
| 1861                 | 9606                                                   | 930                                                         |                                                 |
| 1862                 | 8380                                                   | 571                                                         |                                                 |
| 1863                 | 7583                                                   | 1071                                                        |                                                 |
| 1864                 | 6903                                                   | 1147                                                        |                                                 |
| 1865                 | 6917                                                   | 1219                                                        |                                                 |
| 1866                 | 9199                                                   | 1001                                                        |                                                 |
| 1867                 | 11200                                                  | 651                                                         |                                                 |
| 1868                 | 10107                                                  | 331                                                         |                                                 |
| 1869                 | 9394                                                   | 710                                                         |                                                 |
| 1870                 | 8209                                                   | 1752                                                        |                                                 |
| 1871                 | 8498                                                   | 1065                                                        |                                                 |
| 1872                 | 7204                                                   | 1224                                                        |                                                 |
| 1873                 | 9078                                                   | 448                                                         |                                                 |
| 1874                 | 7456                                                   | 1021                                                        |                                                 |
| 1875                 | 9665                                                   | 514                                                         |                                                 |
| 1876                 | 12794                                                  | 414                                                         | 215                                             |
| 1877                 | 13079                                                  | 256                                                         | 126                                             |
| 1878                 | 11733                                                  | 248                                                         | 67                                              |
| 1ste Halvaar<br>1879 | 5136                                                   | —                                                           | —                                               |
| 1879—80              | 10673                                                  | 659                                                         | 235                                             |
| 1880—81              | 9008                                                   | 2229                                                        | 973                                             |
| 1881—82              | 12290                                                  | 1569                                                        | 3296                                            |
| 1882—83              | 13062                                                  | 941                                                         | 2667                                            |
| 1883—84              | 13369                                                  | 1377                                                        | 2109                                            |

Det fremgaar af en Sammenligning mellem Armen og Kongens Grubes Produktion imellem 1700 og 1790 og 1859 og 1884, at hine Gruber i gammel Tid aldrig naaede en Produktion, der kan sammenlignes med den nuværende. Den største Mængde Sølv sees at være udbragt af Kongens Grube i Aaret 1719, men udgjør i hint Aar ikke mere end 2124 Mark. Den samlede Produktion af hine to Gruber i hine 67 Aar er 15765 Mark fra Armen Grube og 24384 fra Kongens Grube, tilsammen 40149, men de samme to Gruber har i de sidste 4 Aar givet 47729 Mark Sølv, eller i 4 Aar over 7000 Mark mere end i 67 Aar i forrige Aarhundrede.

Haus Saschen Grube, hvor Driften først kom i ordentlig Stand i 1876, har i de sidste 3 Aar leveret 2 til 3000 Mark gedigent Sølv (4000 til 6600 Mark fint Sølv), men en saa stor Produktion findes i ældre Tid kun i 3 Aar mellem 1721 og 1723.

Gottes Hülfe in der Noth har i det hele ikke leveret saa meget Sølv, som man efter Produktionen i gammel Tid skulde vente. Den Tid vil forhaabentlig komme, da denne Grube rigeligt betaler de Udlæg, man har havt paa den, og jo stærkere den belægges, desto hurtigere vil efter al Sandsynlighed Overskuddet komme.

— Om Fund af større Sølvklumper er der fra ældre Tid meddelt Efterretninger. Det er fortrinsvis i de Gruber, der har leveret den største Produktion, at man har fundet de store Klumper. En Del af disse Fund fra ældre Tid nævnes her.

I Segen Gottes i 1630 i et Dyb af 3 Lagter fandtes et Stykke vægtigt 130 Mark.

I Segen Gottes nogle Lagter dybere en anden Klump vægtig 490 Mark.

1664 i Numedal i en Gang ved Jondalselv, sandsynligvis i Fredrik IV's Gang et Sølvstykke paa 250 Mark.

I Gottes Hülfe i 1666 i Gesænket Neue Hoffnung et Stykke, som veiede 560 Mark.

Juls Grube gav 1695 to Klumper paa 134 og 236 Mark.  
I 1705 leverede Segen Gottes to Stykker paa 196 og 114 Mark.

I St. Andreæ Grube i 1719 Sølvstykker paa 279 Mark.  
1766 gav Gottes Hülfe en Klump paa 400 Mark.

1769 atter Gottes Hülfe en Klump paa 518 Mark, hvilken var forbunden ved en Sølvten med en anden Klump paa 130 Mark.

Fra 1764 berettes om Fund af to Stykker paa 320 og 254 Mark. o. s. v.

— Hovedplanen for den nuværende Drift paa Kongsberg ansees i Almindelighed og vistnok medrette for at være lagt af Kommissionen af 1833; denne bestod af H. Wedel-Jarlsberg, G. P. Blom, J. Aall, B. M. Keilhau og A. Lammers. Det slaar neppe feil, at Professor Keilhau har været den ledende Aand i dette Kollegium. At den Plan, som her blev opgjort, har været forstandig, og at den er baseret paa sunde Principer, er vistnok almindelig erkjendt. Det maa derhos erindres, at Planen blev opgjort paa en Tid, da Landets Hjælpekilder var mindre, Tilliden til Sølvværket ikke stor, og da den høieste Grad af Forsigtighed var nødvendig efter de foregaaende Aarrækkers lange og sørgelige Erfaringer.

Kommissionen viser først, at de enkelte Grubers Produktion er høist variabel, og at det derfor vil være klart, at kun et tilstrækkeligt Antal Arbeidspunkter paa engang i Drift, kan være istand til, i det hele Udbringende, at udjævne den Fluktuation, som Produktionen af de enkelte Gruber er underkastet. Derpaa fortsætter Kommissionen:

»Spørgsmaalet bliver dernæst, om Beløbet af dette hele, saaledes til et nogenlunde egalt Annum udjævnede Udbringende vilde staa Forhold til Arbeidets Vidtløftighed, d. e. om en saadan Drift kunde ventes lønnende; thi herpaa gaar jo det fremsatte Spørgsmaal om samtlige Leiesteders, eller endog kun et vist givet Feldts Leiesteders Sølvindhold, dog egent-

lig ud. Naar det tilstrækkelige Antal Arbeidspunkter bliver valgte med Skjønsmhed og Omtanke, og naar Driften paa disse udføres med Orden og Økonomi, saa vove vi at besvare dette vigtige Spørgsmaal, om Driften vil blive lønværdig, med Ja. Med Hensyn til den forbigangne Tid gjælder vistnok, at hvor store og gamle de Gruber end ere, og hvor kjæmpemæssigt overhovedet det hele udførte Arbeide i de kongsbeargske Ertsfjelde end viser sig, saa maa dog de vundne 2,400,000 Mk. fint Sølv (omfrent 13000 Mark om Aaret fra 1624 til 1805), under en forstandig og redelig Drift, og især hvis den fuldkomnere Kunst, som nu er mulig, havde kunnet anvendes, ansees ikke alene tilstrækkelige til at have kunnet dække alle Omkostninger, men ogsaa til at have maattet give et klækkeligt Udbytte, ved en endelig Opgjørelse. Leiestederne totale Sølvindheld har altsaa været stort nok for en lønnende Drift. Da de nu, hvilket man vist ogsaa med fuldkommen Sikkerhed kan antage, endnu ere langt fra at være afbyggede, ja sikkert mange endnu ikke ere angrebne, saa er der ingen Grund til at tro andet, end at Sølvindholdet i Almindelighed taget ogsaa for en tilkommende Drift vil være betydeligt nok til at dække Omkostningerne og til at give et Overskud. Dersom man deler den Formening, at de store Skatte, som de kongsbeargske Fjelde uimodsigeligen endnu indslutte, kraftigen opfordre til en Fortsættelse af det herværende Sølvværk, saa er intet nødvendiggere, end strax at etablere det Princip, som ligefrem udspringer af de ovenfor udviklede Naturforholde, og som ikke kan tilsidesættes, uden at man sent eller tidlig vil føle sig skuffet i sine Forventninger og atter forlade det paabegyndte Foretagende. Ifølge hine Naturforholde maa det være enhver indlysende, at Driften paa en enkelt Gang eller paa et meget indskrænket Antal Gange, saasom Optagelsen og Fortsættelsen af en eller et Par Gruber, aldrig kan give nogen Vished for et heldigt Udfald. Vistnok skulde det være muligt, at Valget kunde falde paa

Steder, som endog meget tidlig aabnede et rigt Sølvkammer, eller paa saadanne, som idetmindste dog engang, om ogsaa sent, lønnede Driften; men ligesaa muligt kunde det være, at Valget faldt paa Steder, som paa intet opnaaeligt Punkt indeholdt Erstatning for Arbeidet. Da det nu ikke kan ansees fornuftsmæssigt at grunde et Værk paa en saa blind Mulighed, saa maa det, hvad Kongsberg angaar, gjælde som ufravigelig Regel hellere at lade den hele Bergværksdrift der fare, end at lægge en Plan for samme, hvorefter Driften af ikkun en eller et Par Gruber tilsigtes. En fornuftsmæssig Plan for Kongsbergs Sølvværk maa altsaa gaa ud paa Vindingen af Sølvet fra saamange Leiesteder, at den Usikkerhed, som finder Sted med Hensyn til de enkelte, kan hæves ved Balancen af samtlige.

Heri har vi udtalt den Grundsætning for Driften ved Kongsbergs Sølvværk, ved hvis Befølgelse et heldigt Udfald af Foretagendet alene er at forvente. Der gives tvende Veie, som fører til Maalet. Den ene er den virkelige af de Gamle fulgte, nemlig paa engang at bearbejde et meget stort Antal Forhaabningspunkter; det er vistnok den eneste, ad hvilken et nogenlunde stadigt Annuum og et jævnt Udbytte kan erholdes, men den tvinger Efterkommerne ind i en Rørelse, som de ikke kunne forlade, uden at paabyrde Nationen større eller mindre Opofrelser, og kan derfor ei tilraades. Den anden Vei er den, at man lader Tiden bøde paa Arbeidsstyrken, saa at man udretter det samme, f. Ex. med  $\frac{1}{10}$  Kraft i ti Gange saa lang Tid. Produktionens Annua ville da rigtignok blive høist ustadige; men Erderesultatet, Udbyttet af det hele Foretagende, vil i begge Tilfælde blive næsten det samme. Det kommer ved den sidste Fremgangsmaade kun an paa, at Entreprenøren har Kraft nok til at udholde Tab i en Række af Aar, og Udholdenhed nok til, trods disse Tab at fortsætte Driften, saa at han ikke, utaalmodig over de bestandige Tilskud, forlader Foretagendet, maaske faa



Skridt fra Skatten, som skal belønne hans anvendte Kraft. Dersom denne her opstillede Grundsats angaaende en Driftsplan for Kongsbergs Sølvværk er rigtig, saa bliver et helt Antal Forhaabningspunkter at paavise, som de, der skulle tages i Drift, efterhaanden som den Arbejdsstyrke, der antages som passende, tillader. Da den Fordring, at Arbejdspunkterne maa ligge saaledes, at et ordnet Sammenhæng og en vis Helhed i Driften kan opnaaes, baade ei af yderste Vigtighed for Driften selv, og desuden synes aldeles væsentlig, naar Udkastet til Arbejdet skal fortjene Navn af en virkelig Plan, saa forudsættes, at Valget maa gaa ud paa et helt Feldt, og og ikke paa adspredte Punkter i forskjellige Feldter. Ved Valget vil det altsaa komme an paa, hvilket Feldt der formodes at indeholde mest Sølv; der vil dernæst ogsaa blive at tage Hensyn til de flere Omstændigheder, som ere af en mere eller mindre væsentlig Indflydelse paa Arbejdets Fremgang og paa Omkostningerne ved Vindingen af Sølv.

Det Princip, der ligger til Grund for Driften paa Kongsberg, er altsaa slig, at Værket efter Planen skal have Perioder, da det trænger Tilskud, og Perioder, da det giver Overskud, dog saaledes, at naar et endeligt Opgjør for en længere Aarrække kommer istand, saa skal der være Overskud. Det har nu i en Række af halvhundrede Aar stadig givet Overskud, hvilket som vi senere skal se, neppe ene og alene kan tilskrives Held, men forhaabentlig har sin Grund i større Indsigt, Redelighed, kraftigere Maskiner, stærkere Sprængmidler o. s. v.

Kommissionen af 1833 siger udtrykkelig, at den eneste Vei, ad hvilken et nogenlunde stadigt Annuum og et jævnt Udbytte kan erholdes, er den, at bearbejde et meget stort Antal Forhaabningspunkter. Det vil med andre Ord sige, at en større Drift vil lønne sig, en liden er udsat for voldsomme Fluktuationer. I Kraft af dette Princip skulde man tro, at Kommissionen af 1833 havde foreslaaet, at et større og til-

strækkeligt Antal Arbeidspunkter, valgte med Skjønsomhed og Omtanke, samtidige skulde tages i Drift. Det slaar neppe fejl, at Kommissionen, om den havde kunnet gjøre Regning paa en større Driftskapital, vilde have foreslaaet flere Gruber optagne. Men de uheldige Resultater af Driften i forrige Aarhundrede ligesom den Nød og de svære Udgifter, som Sølvværkets pludselige Nedlæggelse i 1805 voldte, har øvet sin Indflydelse helt ned til vor Tid, og Erindringen om hine sørgelige Aar efter 1805 stod endnu levende for Nationen i 1833. Kommissionen er øiensynlig nødt til at gaa afveien for denne Opinion og foreslaar ikke, at et større Antal Forhaabningspunkter skal tages i Arbeide, fordi »den tvinger Efterkommerne ind i en Rørelse, som de ikke kunne forlade, uden at paabyrde Nationen større eller mindre Opofrelser og kan derfor ikke tilraades.« »Den anden Vei«, fortsætter Kommissionen, »er den, at man lader Tiden bøde paa Arbeidsstyrken, saa at man udretter det samme f. Ex. med  $\frac{1}{10}$  Kraft i en ti Gange saa lang Tid. Produktionens Annua ville da rigtignok blive høist ustadige; men Enderesultatet, Udbyttet af det hele Foretagende, vil i begge Tilfælde blive næsten det samme. Det kommer ved den sidste Fremgangsmaade kun an paa, at Entreprenøren har Kraft nok til at udholde Tab i en Række af Aar« o. s. v. I Henhold til det førte Ræsonnement er Arbeidsstyrken ved hele Kongsbergs Sølvværk endnu kun 350—360 Mand, et Tal, som ikke maa eller ialfald ikke kan overskrides synderligt med de nuværende Bevilgninger. Det fremgaar som sagt af det hele Ræsonnement, at kun en større Drift vil have Udsigt til at give et jævnt Udbytte, men Kommissionen foreslaar ikke desto mindre en liden Drift. Sagens egentlige Kjerne har vel været den, at der ikke har været Haab om at faa bevilget en større Driftskapital, og at Kommissionen ved et kløgtigt Ræsonnement giver det Udseende af at følge den principmæssigt rigtige Plan, som de i Virkeligheden saa haardt forsynder

sig imod. Kommissionen foreslog, at Antallet af fast Mand- skab ved Sølvværket ikke skulde overskride 300 Mand. Hvis man skal tillægge det ovenfor anvendte Exempel  $\frac{1}{10}$  Kraft anvendt i 10 Aar nogen Betydning, skulde en Arbeidsstyrke, der svarede til Feltets Udstrækning og Forekomsternes Natur, være 3000 Mand, men i 1833 endnu mindre end i 1885 gik det an at foreslaa et saadant Arbeidsbelæg.

— De foregaaende Beretninger om Sølvværkets Historie vil indeholde flere Momenter til Besvarelsen af det Spørgs- maal, om Gangene i Kongsberg Sølvværks Cirkumference er saa ustadige, at de skræmmer fra Udvidelse af Driften. Det er klart, at skal en Udvidelse finde Sted, bør den helst ske paa en Tid, da Værket, selv med de faa Gruber, som er i Drift, giver Overskud. Det slaar neppe fejl, at det er Hensynet til de med Optagelsen af nye Gruber forbundne Omkostninger i Forbindelse med Erindringerne om Værkets ældre Historie, som staar i Veien for en udvidet Drift i dette vidtløftige sølv- førende Felt.

Med Hensyn til Driften, saa er det af alle erkjendt, at Kongsberg Sølvværk i ældre Tid i det hele har været be- styret af Mænd med liden Indsigt i sit Fag. Naar und- tages Slanbusch fra 1686 til 1705 og Stuckenbrock fra 1737 til 1756 og maaske Hjorth (1775—1791) synes Berghaupt- mændene paa Kongsberg i ældre Tid at have været lidet ind- sigtsfulde Folk, og det maa erindres, at i hin ældre Tid af- hang Værkets Trivsel for den allerstørste Del af vedkom- mende Berghauptmand.

At nu hine sørgelige Erfaringer fra ældre Tid og de stadige Overskud i de sidste femti Aar ikke alene maa skrives paa Bekostning af Sølvgangenes Ustadighed vil sik- kerlig fremgaa af følgende Omstændigheder:

- 1) Arbeidskraften i ældre Tid blev daarlig udnyttet, fordi Arbejderne ikke opholdt sig ved Gruberne i Bergstuerne,

men de havde efter Baumann ofte  $1\frac{1}{2}$  Mil at gaa, før de kom til Gruberne.

- 2) Maskinerne, som tidligere benyttedes ved Fordring og Lensning, blev ikke forandrede, saaledes som Grubernes tiltagende Dybde forlangte det. De byggedes efter det gamle Mønster, og efter Baumann forandredes efter Stackenbrocks Død (1756) ingen Maskine, indtil Værkets Nedlæggelse 1805, idet de nye Maskiner byggedes som de gamle.
- 3) Af de store Stoller, som paabegyndtes før 1805, fik Sølvværket forholdsvis liden eller slet ingen Nytte. Kristians Stol, der indtil 1793 var inddrevet 453 Lagter fra Syd og 419 Lagter fra Nord, og som kostede med Lichtlocher efter Brünnich 241138 Rdr. 8 Sk., voldte kun Udlæg, fordi den ikke sloges igjennem til nogen større Grube. Selv Underbergstollen, der paabegyndtes i 1721, blev først i 1802, altsaa kun 3 Aar før Sølvværkets Nedlæggelse, slaet igjennem til Samuels Grube. Heller ikke Fredriks Stol sloges igjennem og voldte saaledes ogsaa kun Udgifter.
- 4) I Oberberghauptmand Heltzens Tid udvidedes Driften over rimelige Grændser, Pukværkernes Antal forøgedes fra 6 til 16, Arbeidernes Antal til 4000 Gruber og Skjærp, som ikke burde drives, blev belagte, en Smeltehytte opførtes i Nummedal, men blev aldrig taget i Brug o. s. v.
- 5) De almindelige Regler for Veirvexlingen synes efter Beretningerne end ikke i en Aarrække efter 1814 at have været kjendte, og Klagen over »Stank«, Kulsyre i Gruberne, er saare almindelig og gav Anledning til at indstille mange Drifter.
- 6) Smeltningerne foregik neppe altid med den tilbørlige Indsigt og Omhu. Efterretningerne fra ældre Tid fortæller ofte om Feil ved Smeltningerne. Den Omstændighed, at man, da den gamle Smeltehytte skulde istandsættes efter Værkets Optagelse, »fandt« 800 Mærker Sølv

og 25 Skippund Bly tyder ikke paa, at Smeltningen altid er foregaaet med Omhu og Kontrol.

Skjønt Arbeidsudgifterne siden hin Tid er steget, og skjønt Sølvets Værdi er faldt, stiller Forholdene sig ganske anderledes gunstigt for Driften i vor Tid end i hin.

1. Kyndigheden i Bergværksdriften er ulige større nutildags, Kontrollen med alle Slags Arbeider større, og utvivlsomt tør det trygt forudsættes, at mange Misligheder, som gik i Svang i ældre Tid, nu slet ikke eksisterer.
2. Arbeiderne, som den største Del af Ugen bor ved Gruberne, har Anledning til at udnytte sine Kræfter bedre, idet de ikke behøver at tilbagelægge større Strækninger, før de kommer til Arbeidsstedet. Derhos er ved de nye Fahrkunster Anstrængelsen ved Anfæringen meget mindre, hvad der ogsaa i-høi Grad bidrager til, at Arbeiderne udretter mere.
3. De nye og vel konstruerede Vandsøilemaskiner gjør Omkostningerne ved Lensningen af Gruberne mindre, de gjennemslaaede Stoller kommer til sin fulde Nytte, Fordringen er trods Grubernes større Dyb lettere, og Veirvexlingen lægger ingen synderlige Vanskeligheder iveien.
4. Den enkelte Arbeider udretter nu meget mere end før, efter Indførelsen af Enmandsboring, Staalbor og de nyere Sprengmidler, Sprenggummi og Gummidynamit.

Naar alle disse Forhold tages med i Betragtning, og man derhos erindrer, at Værket i hele femti Aar har givet Overskud, saa vil det neppe kunne betvivles, at Driften paa de sølvførende Gange gjennemgaaende vil stille sig ganske anderledes gunstig nu end i tidligere Tid. Den Frygt, som man i sin Tid nærrede for at udvide Driften, er med hine Kjendsgjæringer for Øie sikkerlig nu fortiden mindre motiveret end i 1833, og Nationen har nu langt større Magt til at udnytte sin Eiendom end i hine Aar, da Planen for Kongsberg Sølvværk blev opgjort.

I ældre Tid har Kongsberg Sølvværk et Par Gange været i private Kompagniers Hænder, og begge Gange har Staten maattet tage det tilbage. Ogsaa i 1831 og 1832 stod man paa Nippet til at sælge Værket, som før berørt. Det er et Spørgsmaal, som oftere har været opkastet, om det er rigtigt, at Staten her optræder som Driftsherre, og om det ikke var for alle Parter det fordelagtigste, at Staten mod rimelig Godtgjørelse overlod Driften af Sølvværket til et privat Kompagni.

Hvor man har et Tog af Gange som de kongsbergske, hvori Sølvet er uregelmæssig fordelt, hvor den Fristelse altid ligger nær at sikre sig et øieblikkeligt Udbytte ved kun at drive paa Anbrud, uden Tanke paa Fremtiden, hvor videre Drivkraft maa skaffes tilveie ved Drift af Stoller, og hvor langvarige og kostbare Arbeider derfor maa fortsættes for først at give Frugt i Fremtiden, der er en Centralisation af Driften og en for lang Tid beregnet Organisation utvivlsomt paa sin Plads.

Callon diskuterer i sine »Cours d'exploitation des mines« hvor han omhandler Driften af Stollerne, Fordelene og Manglerne ved en centraliseret Drift under Statens Opsyn, idet han specielt sammenligner Principerne for den tyske Drift paa Harz med det engelske Princip, der overlader det meste til det private Initiativ. Da Spørgsmaalet her forekommer mig grundigen behandlet, og da meget af det, som siges, passer paa Spørgsmaalet om den principmæssig rigtige Drift paa Kongsberg, saa hidsættes hans Bemærkninger her:

»Stollerne har ved Siden af sine andre Fordele ogsaa den, at de giver Afløb ikke alene for det Vand, som siger ind i Gruben, men ogsaa for det, som findes, eller som kan samles i Dagen, og som man med Villie kan lede ind i Gruben. Denne særegne Fordel bestaar deri, at man ved at lede Vand ned i Gruben faar en Drivkraft, hvis Størrelse afhænger af den Vandmasse, man kan disponere over pr. Sekund, og den Høiden mellem det Punkt, hvor man samler Vandet

i Dagen, og det Punkt, hvor man kan slippe det ud gennem Stollen. Man vil forstaa, hvilken Betydning denne Omstændighed kan have i et Bjergland, hvis man ikke er bange for langt borte at søge et Punkt, der ligger saa lavt, at Stollen kan naa frem i Dagen.

Den Drivkraft, som saaledes skaffes tilveie, kan tjene ei alene til Fordringen i Drifterne over Stollens Niveau, men ogsaa til Lensning og Fordring i de under Stollen liggende Drifter, hvilke kan være desto betydeligere, jo større den frembragte Drivkraft er. Jo dybere Stollen ligger, desto dybere vil ogsaa det Dyb være, som man kan naa under samme.

Disse Betragtninger forklarer fuldkommen og berettiger de uhyre Stolarbeider, som er udført i visse Bergværksdistrikter, fornærmelig i Tyskland, forat sikre sig en fremtidig Drift paa Dybet. Saaledes har man paa Harz, efter henimod Slutningen af forrige Aarhundrede at have fuldført Georg Stollen, et halvt Aarhundrede senere i 1851 paabegyndt en dybere Stol, Ernst August Stoll, som nu er færdig, og som ikke er mindre end 16800 Meter, og som blev bygget paa 15 Aar. Denne Stol, som man almindeligvis har givet 1.75 Meters Bredde og 2.60 Meters Høide og en Heldning af  $\frac{1}{2}$  Millimeter pr. Meter, skaffer de forskjellige Gruber i Distriktet, i hvilke den indbringes, Høider, som naar og overgaar 400 Meter. Dette enorme Fald kan udnyttes i forskjellige Dele; de øverste Dele kan benyttes til Hjul, til Turbiner eller til roterende Vandsøilemaskiner efter den fornødne Faldhøide. Disse Receptorer kan sætte i Bevægelse ved passende Transmission Fordringsmaskinerne, Pukværkerne, Ventilatorerne og i Almindelighed alle de Maskiner, som behøves i Dagen. Endelig vil den øvrige Del af Faldet sætte Vandsøilemaskiner i Bevægelse, hvilke kaster Driftvandet ud i Stollens Niveau og tjener til at lendse den under Stollen liggende Del af Gruben.

Dette store Arbeide, som synes ikke at lade noget tilbage at ønske med Hensyn til en forstandig Brug af Drifts-

vandet, er et mærkværdigt Mindesmærke over det Fremsyn og den Udholdenhed, hvormed Bergbygningen allerede i tre Aarhundreder er bleven ført paa Harz.

Men det er klart, at forat en saadan Plan skal kunne gjennemføres paa rette Sted, det vil sige, forat Nyttens af et saadant Arbeide skal staa i Forhold til Udgifterne, maa man staa foran Ertsleiesteder med en betydelig Udstrækning i Felt og paa Dybet.

Det er desuden nødvendigt, at den lovlige Myndighed, under hvilke disse Arbeider udføres, er slig udrustet, at de enkelte Eieres personlige Opfatning ikke kan sætte en uoverstigelig Hindring for Udførelsen af det samlede Arbeide.

Det har været Tilfælde paa Harz, og uden at alle disse Betingelser havde været forenet, er det sandsynligt, at deslige Arbeider ikke vilde kunne blive udført, at man ikke engang vilde have faldt paa den Tanke at udføre dem.

I England derimod, hvor Initiativet, Foretagsomheden og den personlige Energi sikkerligen er meget større end i Tyskland, og hvor Kapital er rigelig tilstede, finder man kun svage Efterligninger af disse storartede Arbeider, endog i de mest blomstrende Bergværksdistrikter, hvis Produktion imidlertid er noget ganske andet end i lignende Distrikter i Tyskland.

Denne mærkværdige Forskjel hidrører fra mangfoldige Aarsager.

Paa den ene Side (i Tyskland) ser vi en vidtgaaende Deling af de ertsførende Distrikter; men disse mangfoldige Eiendomme, udstykket med Hensyn til Udbyttet, udnyttes underet af Ingeniører, der kun afhænger af Staten, og som har Magt til at udføre Projekter til det fælles bedste, saa som hine Stoller, med hvilke vi beskæftiger os.

Paa den anden Side ser vi i England, at Eiendomsretten under Jorden følger med Retten i Overfladen, og følgelig tilhører Gruberne de store Eiendomsbesiddere, der er intelligente nok til at indse Værdi af sine underjordiske Eiendomme og



forstaar at udnytte dem enten ved egne Midler eller ved at overlade dem midlertidig paa liberale Betingelser til Grubekompanier.

Vi ser, at disse Selskaber arbejder med Intelligens og Iver, og at de intet forsømmer, for at indrette sin Drift i stor Stil; men paa samme Tid er de fuldstændig ude af Stand til at udføre Arbejder saa udstrakte og saa langvarige, som de store Vandstoller, som man finder saa mange af i Ertsdistrikter i Tyskland; de hindres nemlig i at udføre dem først paa Grund af, at de disponerer over et indskrænket Felt, der ikke staar i Forhold til Leiestedets Udstrækning under Jorden, og dernæst paa Grund af, at deres Kontrakter varer saa kort.

I denne Henseende kan man sige, at den tyske Organisation har i visse Henseender Fordel fremfor den engelske.

Centralisationen af Grubedriften paa de samme Hænder tillader at samle Arbejdet under en fælles Plan og at udføre Foretagender, der interesserer et helt Distrikt, og som ikke vilde være mulige for mindre Grubeselskaber, der ikke stod i Forbindelse, og som ofte var skinsyge paa hverandre.

Denne Centralisation sikrer desuden en god og fuldstændig Afbygning af Leiestederne; den tillader paa Grund af den Solidaritet, der er bragt istand mellem Gruberne, at overvinde de uheldige Perioder for de enkelte Gruber, og hvis ikke det var Tilfældet, maatte den enkelte Grube nedlægges.

Paa den anden Side er det ikke fra en saadan Centralisation, at der udgaar Initiativ til Forbedringer; den vil indskrænke sig til at følge efter langsomt, men sikkert, efterhaanden som Forbedringen indføres andre Steder.

Det er i det hele ikke sikkert, at de ertsførende Egne paa Harz, der administreres som omtalt, vilde have indtaget en heldig Stilling i teknisk Henseende, hvis de havde været delte mellem et vist Antal Kompagnier uden fælles Interesser.

Det er ikke engang sikkert, at Gruberne vilde været i

Drift nu; thi deres Historie i Fortiden viser, at de har været i meget precare Situationer, idet de gav et Udbytte, hvormed Aktieselskaber ikke altid vilde have kunnet lade sig nøie.

Dette er de Fordele, som er eiendommelige for Centralisationssystemet.

De opveies ved de Ulemper, som er en naturlig og næsten nødvendig Følge af Centralisationen.

Hvis Direktionen er forstandig, hvis den i det hele ikke gjør større Feil, hvis Planerne for Fremtiden, der langsomt modnes, er vel gjennemtænkte, saa mangler den dog i den daglige detaillerede Ledelse af Arbejderne den Opmuntring og den Iver, som finder sin kraftigste og stadigste Stimulans i den personlige Interesse. Den er langsom til at forøge Produktionen; den har ikke Initiativ for Fremskridt; Nødvendigheden af at gaa frem efter visse Formler, idet enhver Beslutning, som skal træffes, maa passere gennem et langt Hierarchi af Betjente, den ene underordnet den anden, denne Nødvendighed bringer disse til at miste Følelsen af det personlige Ansvar, kvæler deres Initiativ og berøver Ledelsen den Bestemthed og Raskhed, som er nødvendig i Forretning-anliggender o. s. v. o. s. v.

Disse Fordele og disse Ulemper er forøvrigt ikke noget, som er eiendommeligt for Grubeanliggender. Man gjenfinder dem i alle Tilfælde, hvor den offentlige Administration driver en hvilkenksomhelst Fabrikvirksomhed, istedetfor at overlade den til den private Industries Omsorg.

Disse Bemærkninger finder som berørt for en stor Del sin Anvendelse paa Kongsberg. Hvis Gruberne havde tilhørt private Selskaber, er det vel tvivlsomt, om de store Damme var blevne byggede, om de lange Stoller var drevne, og det slaar neppe feil, at private Selskaber ikke vilde have havt Udholdenhed til at drive en enkelt Grube i længere Tid med Tab. De Erfaringer, man har fra Vinoren og Anna Sofia, tyder paa, at den private Bergværksdrift ikke vil gaa

paa Kongsberg, med mindre der dannes et Selskab med meget stor Aktiekapital og stor Udholdenhed. Men Betingelsen for og Interessen for større, vel motiverede Foretagender i Bergværksdriften synes endnu at mangle i vort Land.

— Da de sølvførende Felter paa Kongsberg er vidstrakte, og Gruberne er mange i Antal, kan Driften udvides i forskjellig Maalestok og efter forskjellige Planer. Med Tilslutning til den nuværende Drift kan en Udvidelse finde Sted paa følgende Maade:

- 1) Ved en stærkere Belæg i de tre ældre Gruber.
- 2) Ved en mere energisk Udlækning paa en Del af de Gange, som er overfarede paa Kristians Stoll.
- 3) Ved Optagelsen af gamle Justits Grube og af Gabe Gottes Grube, med efterfølgende Optagelse af andre Gruber paa Overberget.
- 4) Ved Optagelsen af Underberg Stollen i den Hensigt at drive denne ind til Haus Sachsen, Optagelsen af nogle af de rigere Gruber paa Underberget og Concentrationen af den hele Drift nær Kongsberg By.

Af disse Forslag fordrer en stærkere Drift i de Gruber, som nu er belagte, samt Udlækning paa Gangene i Kristians Stoll ingen større foreløbige Udgifter, saaledes som Optagelsen af gamle dybe Gruber og Fortsættelsen af lange Stoller. Vi vil betragte hvert Forslag for sig.

1) *store Belæg i de i Drift værende Gruber.* Ved den egentlige Grubedrift har ifra 1859 følgende Antal Arbeidere været beskjæftigede:

|              | Armen og Kongens Grube. | Gottes Hülfe. | Haus Sachsen. | tilsammen. |
|--------------|-------------------------|---------------|---------------|------------|
| 1859         | 182                     | 90            |               | 272        |
| 1860         | 185                     | 92            |               | 277        |
| 1861         | 183                     | 104           |               | 287        |
| 1862         | 179                     | 97            |               | 276        |
| 1863         | 195                     | 96            |               | 291        |
| 1864         | 182                     | 92            |               | 274        |
| 1865         | 180                     | 97            |               | 277        |
| 1866         | 176                     | 94            | 3             | 273        |
| 1867         | 165                     | 77            | 16            | 258        |
| 1868         | 160                     | 82            | 28            | 270        |
| 1869         | 171                     | 77            | 29            | 277        |
| 1870         | 165                     | 79            | 25            | 269        |
| 1871         | 170                     | 76            | 24            | 270        |
| 1872         | 164                     | 73            | 25            | 262        |
| 1873         | 160                     | 70            | 26            | 256        |
| 1874         | 159                     | 73            | 24            | 256        |
| 1875         | 149                     | 72            | 27            | 248        |
| 1876         | 154                     | 71            | 33            | 258        |
| 1877         | 156                     | 72            | 28            | 256        |
| 1879         | 161                     | 66            | 30            | 257        |
| Iste Halvaar |                         |               |               | 267        |
| 1879         | 167                     | 68            | 32            |            |
| 1879—80      | 159                     | 64            | 30            | 253        |
| 1880—81      | 153                     | 66            | 37            | 256        |
| 1881—82      | 143                     | 62            | 44            | 249        |
| 1882—83      | 132                     | 61            | 48            | 241        |
| 1883—84      | 128                     | 70            | 46            | 244        |

Det vil af disse Tal sees, at Antallet af Bergværksarbeidere ved Kongsberg har taget af ifra 1859 til 1884, og at der nu med tre Gruber er færre Arbeidere end der tidligere var med to. Optagelsen af Hans Sachsen Grube gik for sig, uden at Arbeidernes Antal forøgedes. Dette Forhold opveies eller mere end opveies sikkerligen derved, at en Mand nu siden Indførelsen af Staalbor, nye stærkere Sprengmidler og med noget bedre Lønning og bedre Næringsmidler udretter meget mere end en Mand i 1859, men Tallene viser noksom, at der i de i Drift værende Gruber er Anvendelse for

flere Arbeidere. Optagelsen af Haus Sachsen Grube har bevirket, at Armen Grube og Gottes Hülfe er blevne svagere belagte. Men en mere forceret Drift i de nærværende Gruber vil paa samme Tid, som den medfører en Stigning i Produktionen, tillige bevirke, at Gruberne hurtigere gaar paa Dybet og i det hele hurtigere afbygges, og bør derfor naturligen gaa Haand i Haand med Optagelsen af en eller flere gamle Gruber valgte med Skjønsomhed og i Overensstemmelse med med en lagt Plan.

Med Hensyn til Antallet af Arbeidere ved Kongsberg Sølvværk, saa er det som oftere berørt Frygten for en Nedlæggelse af Værket og Skræmmebillederne fra Aarhundredets Begyndelse, som ene og alene har været Grunden til, at Arbeidsstokken holdes saa unaturlig liden. Men selv om Arbeidsstokken i det hele fordobledes, og det dobbelte Antal Gruber toges i Drift, saa vilde endnu ikke Driften foregaa efter en Maalestok, som Feltets Udstrækning, de geologiske Forhold og en forstandig Udnyttelse af det sølvførende Felt tilsiger.

Ifølge Storthingsbeslutning af 1833 maatte Arbeidsstyrken ikke overskride 360 Personer, hvilket Antal Kommissionen af 1833 foreslog nedsat til 300. I 1836 og 1839 blev Maximum sat til 360 Mand, i 1842 og 45 til 400. Siden 1848 har Storthinget ikke udtrykkelig besluttet, at der skal være et vist Maximum, skjönt Forudsætningerne for Bevilgningen altid har været, at Værket ikke skulde beskjæftige et større Antal Arbeidere.

Man har ved Grubedriften i Armen og Kongens Grube i de senere Aar rykket noget hurtigere paa Dybet, i begge Gruber med heldigt Resultat, idet man paa Dyb af omkring 600 Meter har gode Anbrud. Derved at Grubernes Udstrækning paa Dybet tiltager, faar man flere Arbeidssteder og har Anledning til at forøge Arbeidernes Antal. Men det er klart, at en Forøgelse af Arbeidsstyrken fører til en hurtigere Afbygning af den enkelte Grubes Gange, og at en Drift beregnet

paa Fremtiden under en mere forceret Afbygning forlanger Optagelsen af nye Gruber og Forsøgsdrift paa flere Gange.

*Udlækning paa Gangene i Kristians Stol.* Denne Stol, der som tidligere berørt, skulde gjenneuskjære Fahlbaandet paa Overberget i en Længde af 27785 Fod, og som, i det den gaar lodret paa Gangenes Strøg, efter Planen skulde overfare Gangene, er nu gjenneudrevet paa mere end sin halve Længde. Til denne Stol som Skjærpestol knyttede man i sin Tid store Forhaabninger, i det man ventede ved den at støde paa Gange i Anbrud. Man har ogsaa stødt paa et stort Antal Gange og Gangdrummer, og nogle af disse Gange har ogsaa ført lidt Sølv, og der er blevet foretaget mindre Udlækninger paa dem. Men større og rigere Gange er ikke blevne overfarne, ligesaa lidt som nogen energisk Udlækning er foregaaet paa dem. Et Par Udtalelser, der allerede tidligere er citerede, viser, hvilket Haab man satte til Fund af nye Gange ved Stollen. Kommissionen af 1821 udtaler endog, at Hovedhensigten med at optage Armen Grube ikke var at exploitere denne Grubes Gange, men Hovedhensigten var at bane Veien til Undersøgelsen det af særdeles vigtige Felt mellem Armen Grube og Gottes Hülfe. Direktør Baumann tillagde Undersøgelsen af Ertsbaandet mellem Armen Grube og Gottes Hülfe saadan Vægt, at han siger, at ingen grundet Døm om Sølvværket kan afgives, førend dette Sølvværkets ædleste Ertzbaand var undersøgte. Nu er Stollen slaaet igjennem dette Ertzbaand til Gottes Hülfe, uden at Undersøgelsen af de overfarne Gange er drevet med stor Energi.

Kommissionen af 1833 nærede ikke saa store Forventninger til Opdagelsen af nye Gange ved Kristians Stol, og den siger, og vistnok med rette, at en hel Del af de med Stollen overfaredede Gange vil være af liden eller ingen Vigtighed, men den tilføier, ogsaa med rette, at et eller to anfarede Steder ikke kan oplyse om Forholdet i Gangens øvrige Udstrækning indenfor Fahlbaandet.

Kommissionen af 1851 skriver, at det forekommer den aldeles nødvendigt for at fyldestgjøre Plan for Kristians Stol, at forfølge de overskaarne Gange med Feldtorter. Dette er efter Kommissionens Mening saa meget mere paatrængende nødvendigt, som man efter en vistnok temmelig tvivlsom Plan fortsætter Stoller i lige Linie, uanseet om denne falder i Faldbaand eller ei.

I Forbindelse hermed gjør Kommissionen opmærksom paa, at Opskjærping og Undersøgelse af Gange paa Faldbaandene fra Dagen i de Kongsbergs Grubefeldt er af samme Beskaffenhed og har samme Øiemed, men er mindre bekosteligt end Gangenes Opskjærping ved og Undersøgelse fra Kristians Stol. Da Sølvværkets Difftsplan aldeles ikke udelukker, og Lovgivningen, ved at forbeholde Staten Eneret til sølv- og guldførende Gange i de angrændsende Præstegjæld, synes at forudsætte, i det mindste Undersøgelser af den Art, hvorved et eller andet Forhaabningsarbeide kunde opdages, saa har Kommissionen ingen Betænkeligheder ved at anbefale Sprengningsarbeide i Sommermaanederne under kyndig Veiledning enten af Værkets Aspiranter eller andre med fornøden Indsigt udstyrede Mænd.\*)

F. C. Andresen anfører i Skrivelse af 11te Nov. 1851, at der i Fredriks Stol findes over 20 Gang fra 1 Linie indtil  $\frac{1}{2}$  til 1 Tomme tykke, og maaske vilde man ved en nøiagtig Undersøgelse finde over 100 mindre Gange fyldte med Kalk (Gangdrummer, Gangsletter.)

Han anfører videre: »Den Erfaring at ikke alle Gange i Faldbaandene er byggeværdige. at en Del af dem er ansamlede i Grupper, Partier, større og mindre, hvor de danne mere et Netværk end enkeltvis anstaaende Gange, og at Sølvet

\*) Af Skjærpningsarbeider paa nye Gange i sildigere Tid kan mærkes Arbeiderne i Blaarud Skjærp. I Aarene 1869—75 angives Udgifterne her til 1 til 2000 Spd. om Aaret. Produktionen er opført under Armen og Kongens Grube. Skjærpet gav i 1874 66 Mark gedigent Sølv.

alene der er ansamlet, om end uregelmæssig fordelt, saa dog i saadan Mængde, at en regelmæssig og gjennem længere Tid fortsat Afbygning der i det hele er lønværdig, den Erfaring har kostet Sølvværket for mange Penge til, at man kan betragte den som ugjort og nu gjøre den om igjen. Jeg tror derfor, at man med muligst Skjønsomhed bør indskrænke sine Undersøgelser til kun nogle af dem.«

Kommissionen af 1865 har ogsaa sin Opmærksomhed henvendt paa de i Kristians Stol overfarne Gange og giver nogle Oplysninger om disse:

»Den Forventning, man tidligere tildels har næret om ved Christians Stols Drift at træffe rige eller lovende Sølvanbrud fornemmelig ved at overskjære ved Skjærpingen i Dagen uopdagede eller overseede Gange, er ikke gaaet i Opfyldelse. Den Omstændighed, at Stollinien paa et enkelt Punkt gjennemskjærer en Gangflade, kan ikke være afgjørende med Hensyn til Spørgsmaalet om dens større eller mindre Sølvføring, neppe engang, om Gangen fra dette Punkt er undersøgt ved en kort Udlækning til begge Sider. I den Henseende bør det fastholdes, at der ikke opstilles for store Forventninger om Christians Stol som Skjærpestol.«

Efter Opfordring af Kommissionen blev under dens Nærværelse paa Kongsberg et Oversigtskart optaget i Maalestokken  $\frac{1}{2000}$  over Christians Stol mellem Saggrænden og Gottes Hülfe in der Noth, og deri indtegnet alle de ved Stollen trufne Gange. Af dette Kart erfares, at der ialt er opfaaret 251 Gange og Gangdrummer, hvoraf 84 Gange med en Mægtighed, der falder hyppigst omkring  $\frac{3}{4}$  Tomme og sjeldnere derover, samt 167 Gangdrummer, naar til saadanne regnes alle de endnu svagere indtil af Papirs Tyndhed. Kartet viser, at af Gangene er 41 mer eller mindre undersøgte, og naar herfra trækkes 6 for de under Arbeide værende Gruber og 4 for de ældre Gruber eller Skjærp, som Stollen overskjærer, bliver igjen 31 opfarne Gange, før ikke i dette Dyb bearbei-



dede. Af disse har ingen givet Anledning til Forhaabning, uden at det dog paa den anden Side kan udsiges om dem alle, at de er ufyndige. Bergmester Usler beretter nemlig fra 1784, at der paa de første 242 Lagter (Stykket fra Dagmundingen til henimod Gnade Gottes) er overfaret 12 Gange og 7 Drummer, samt at af disse var 3 Ertsgange og 5 Ertsdrummer, af hvilke igjen 1 Gang og 2 Drummer bearbejdedes og havde disse givet  $14\frac{1}{2}$  Tønde Scheideerts. Men, tilføier han, de øvrige Gange og Drummer kunne ikke videre undersøges og bearbejdes, før man kommer igjennem fra Skakt til Skakt for ikke at hindre Stoll-Driften. Paa den anden Side er i den nyere Tid fundet lidt Erts til Ex. paa den overskaarne, øvre Sydgang (Syd for Gottes Hülfe) samt Spor af Erts paa Myrgrubens Gang.«

Ogsaa i Driftsberetningerne om Kristians Stol i senere Aar nordligt for Gottes Hülfe læser man om overfarne Gange, tildels sølvholdige, paa hvilke der af og til udlænkes. Saaledes overfor man i 7de Maaned 1870 en 8 til 10 Tommer bred Gang i en Afstand af omtrent 69 Lagter til Nord for Gottes Hülfe, hvilken Gang ved Udlænkning 4,5 Lgr. mod Øst gav lidt Scheideerts, men senere ubetydelig Gang. Mod Vest blev udlænket 2 Lagter.

I Driftsberetning for 1874 hedder det, at man i Begyndelsen af Aaret omtrent 134 Lagter til Nord for Gottes Hülfe overfarede mange Ganggrene og ligeledes 149 Lagter nordfor Gruben mange Ganggrene med lys Kalk. Iugen af disse Gange er undersøgte ved Udlænkninger.

I Driftsberetning 1882—83 og 83—84 omtales ligeledes en Ertsgang, opfaret i Kristians Stol med Anbrud, 37 Lagter nordenfor Gottes Hülfe. Her blev i 1882—83 udlænket 14.2 Meter mod Vest paa en 2—5 cm, bred Gang, der førte god Scheideerts. Om denne nordlige Gang hedder det i Driftsberetning 1883—84, at den har ved Sænkdrift fremdeles vist sig ertsførende; og har senere i indeværende Aar (1884) ogsaa

vist sig ertsførende med god Erts 11 Lagter dybere ned, hvor den er opfaret med Tverslagdrift. Ogsaa i sidste Driftsberetning 1883—84 omtales 4 Gangdrummer, overfarne mod Kristians Stol; den ene Drum viste Spor af Sølv.

Det fremgaar af, hvad der ovenfor er anført, at et meget stort Antal Gange og Gangdrummer, flere hundrede, er overfarne med Kristians Stol. At det største Antal af disse har liden eller ingen Betydning, deri er sikkerligen de fleste enig. Men ligesaa utvivlsomt er det, og det erkjendes ogsaa af dem, der har udtalt sig herom, at en Del af disse Gange bør undersøges ved Udlænkninger. I saa Henseende mangler man ikke ganske Veiledning. Først og fremst staar de Gange for Tur, der har vist sig i nogen, om end ringe Grad sølvførende, og saavel Bergmester Uslér, som Kommissionen af 1865 og de senere Driftsberetninger giver Oplysning om disse Gange. Endelig har man saadanne Gange, der ligger slig til, at de efter sit Strøg og Fald maa antages at være Fortsættelse af Gange, der i Dagen førte Sølv.

Hvis det er rigtigt, hvad Kommissionen af 1865 anfører, at man i Kristians Stoll ei alene kan finde hver enkelt kjendt eller opskjærpet Gang igjen, men at man ogsaa kan gjenfinde Gangene nogenlunde i de samme indbyrdes Afstande som i Dagen, da vil heri ligge en stor Veiledning i Valget af de Gauge, paa hvilke der bør udlænkes. At en fra Dagen eller i øvre Dyb kjendt Gang i Kristians Stolls Dyb splitter sig til Drummer, hører efter denne Kommission til Sjeldenhederne.

Blandt disse Gange fortjener at nævnes de, der ligger saaledes i Stollen, at de kan antages at være Fortsættelse af Gangene fra Willen Gottes<sup>1)</sup>, Gott bescher, Herzog Friderich, og nord for Gottes Hülfe, Haus Oldenberg, Prinds Carl og Morgenstern. Udvalgte man med Skjønsomhed et Antal, til

1) Willen Gottes skal efter Bergmester Uslers Beretning være indstillet i 50 Lagters Dyb „paa Grund af en Skadeild, skjönt med Erts udi“.

Exempel 10, saadanne Gange, som laa nær eller i Baandet i Kristians Stolls Niveau, enten disse Gange nu havde ført Spor af Sølv eller antoges at være Fortsættelsen af de i Dagen sølvførende Gange, saa havde man her et Antal af Forsøgssteder, hvoraf forhaabentlig et eller flere vilde føre til Anbrud. Omkostninger for Drift af Ort med Bor udgjør pr. løbende Meter i sidste Aar paa Kongsberg:

70.00 Kr. i Armen og Kongens Grube.

73.27 « i Gottes Hülfe.

57.80 « i Haus Sachsen.

En Længde af 200 Meter, eller i Gjennemsnit 20 Meter paa hver af de 10 Gange, vilde kunne drives for 14000 Kroner i Brydningsomkostninger, om vi sætter disse til 70 Kroner pr. løbende Meter. For Udgifter til Saubring, Fordring o. s. v. bør hin Sum af 14000 Kr. forøges. Hvis man uden at skride til de ved Optagelsen af nye Gruber forbundne Omkostninger, vilde forøge Antallet af Forsøgsdrifter, vilde Anvendelsen af en Sum paa 20000 Krone: til Udlækning paa de mest forhaabningsfulde Gange i Kristians Stolls Niveau sikkerligen være fuldt berettiget.

*Optagelsen af Gruber paa Overberget.* Om Forsøgsarbejderne omkring Armen Grube bemærker Kommissionen af 1865: Længere mod Syd har man andre Gangforgreninger, hvorpaa der i de øvre Høider er ældre Drifter under Navn af Gamle Justits Grube. Disse Gruber regnedes mellem de vigtigste Forhaabningspunkter ved Sølvværkets Optagelse i 1816, men forlodes, da de bekjendte rige Anbrud i Kongens Grube begyndte.

Om Gamle Justits Grube siger Kommissionen af 1815, at dens Indstilling tildels forårsagedes ved dens Beliggenhed paa Overbergets Fahlbaand i Nærheden af den indstillede Armen Grube. »Thi alle de rigeste Anvisninger i Gruben, der ved at forfølges nærmede sig Armen Grube, har Interessentskabet været nødsaget at forlade, fordi Vandet, hvor-

med Armen Grube er opfyldt, finder Leilighed til at sige ind i disse Grubers Arbeids-Rum, og ei tillader, at de videre med Fordel bearbejdes, førend Armen Grube ved at tømmes for Vand, igjen kan vorde optagen. De andre Steder i Justits Grube, hvorfra for Tiden Ertz vindes, ere ikke saa righoldige paa Sølv, at der er Sandsynlighed for, at de længe uden Tab kan drives.« Fremdeles bemærker Kommissionen af 1815, der havde god Anledning til at indhente Oplysninger om Justits Grube: »Naar Armen Grube saaledes er lændset for Vand, og dens Grube-Bygninger istandsatte, da vil paa den nordre Side Kongens Grube, som staar i Forbindelse med Armen Grube, tillige kunne lændses og vorde undersøgt, og paa den søndre Side vil gamle Justits Grube med Fordel kunne drives, saasom Vandet fra Armen Grube da ei længere trænger ind i Justits Grube og hindrer en fordelagtig Drift, hvortil dens rige Anvisninger ved Grubens Nedlæggelse giver grundet Forhaabning.«

I Driftsberetning 1869 heder det: Arbeidet med i Fredriks Stols Niveau at opsøge gamle Justits Grubes Gange i Vest og Syd for Armen Grube er fortsat 12.7 Lagter uden noget Resultat, hvorvel en ubetydelig Gang i Slutningen af Aaret blev overfareet. I 1870 blev fortsat med Tverslag 9.3 Lagter langt mod Syd forat søge efter Gamle Justits Grubes Gange. Dette Tverslag blev i 1871 fremdrevet 8.27 Lagter og naaede derved en Længde af i det Hele omtrent 56 Lagter. Efter de gamle Karter og Overstigerens Undersøgelser i de gamle Drifter, saavidt det uden større Rydningsarbejder kunde ske, skulde saavel Justits Grubens næsten lodret staaende Ganggrene, hvor paa dens ældre østre Drift (Hoveddriften) ere drevne ned, som ogsaa dens mere skraat faldende Ganggrene, hvorpaa de gamle vestre og søndre Drifter er drevne, nu være naaede med Tverslaget; men nogen saa tydelig Ganggren, at Undersøgelserne paa samme kunde fortsættes, blev

ikke truffet. Gamle Justits Grube er drevet ned fra Dagen til en Dybde af omtrent 80 Lagter.

I 1872 blev Tverslaget fortsat 4.13 Lagter langt og derpaa indstillet, idet den nu var naaet frem til omtrent 60 Lagters Afstand i Syd for Hovedgangen og dermed længere end de sydligste af gamle Justits Grubens Ganggrene, der skulde være at finde i denne Høide. Nogen saa tydelig Ganggren, at Undersøgelser paa samme kunde drives, blev ikke overfaret.

Gamle Justits Grube hører, som vi ser af Produktionslisterne, til Sølvværkets bedste Gruber; den er kun 80 Lagter dyb; baade Fredriks Stol og Kristians Stol indbringer i større Dyb og kan løse den; den hører med til det Komplex af Gruber, der skal optages efter den nuværende Plan, og den var den eneste Grube paa Overberget, der blev drevet for privat Regning efter Sølvværkets Nedlæggelse, hvilket noksom viser, at Driften ansaaes for lønnende. Den blev imidlertid i hin Tid generet af Vand fra Armen Grube.

— Som gjentagende Gange berørt gik den for Kongsbergs Sølvværk opgjorte Plan ud paa at rykke frem med Kristians Stol indtil Haus Saschen, og at optage og afbygge de Gruber, som løstes ved Stollen. Dette Arbejde skulde udføres med faa Folk i lang Tid. Det er imidlertid indlysende, at efterhaanden som Arbeidet skrider frem, og flere Gruber optages, vil denne Arbeidsstyrke paa 3—400 Mand ikke blive tilstrækkelig, og dette Princip sprenger paa en Maade sig selv, idet det enten fører til, at nye Gruber ikke optages, eller derhen, at de, som ere i Drift, bliver svagt belagte.

Naar der bliver Tale om at optage nogen af de gamle Gruber, saa er det naturligt først at henvende Opmærksomheden paa dem af Overbergets Gruber, som har en for den nuværende Drift bekvem Beliggenhed.

Hr. Quale har ved at sammenholde Produktionslisterne for de enkelte Gruber paa Overberget med Størrelsen af den

Gangflade, der efter Karterne er udbrudte, opgjort en Beregning over, hvormeget Sølv der er kommet fra hver Kvadratlagter Gangflade. Uagtet en saadan Beregning paa Grund af Sølvets uregelmæssige Optræden paa Gangene ikke giver en bestemt Rettesnor for Gangenes Sølvføring, giver den dog et Vink til Bedømmelsen af Gangenes Sølvrigdom.

Efter denne Beregning har i ældre Tid følgende Gruber givet følgende Mængder fint Sølv pr. Kvadratlagter Gangflade i Form af gedigent Sølv, Mittelerts og Scheideerts i:

|                            | Grubebredde<br>i Øst og Vest.<br>Lagter. | Sølv pr. Kva-<br>dratlagter<br>Gangflade.<br>Mark |
|----------------------------|------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 7 Brødre . . . . .         | 6.0                                      | 6.09                                              |
| Haus Sachsen . . . . .     | 16.4                                     | 30.52                                             |
| Erzengel Michael . . . . . | 11.8                                     | 2.49                                              |
| Morgenstern . . . . .      | 7.5                                      | 4.52                                              |
| Prinds Carl . . . . .      | 13.2                                     | 0.08                                              |
| Lovisa . . . . .           | 9.9                                      | 3.52                                              |
| Haus Oldenburg . . . . .   | 6.2                                      | 12.78                                             |
| Gottes Hülfe . . . . .     | 15.5                                     | 80.85                                             |
| Willen Gottes . . . . .    | 8.9                                      | 5.66                                              |
| Kongens Grube med          |                                          |                                                   |
| Fredrik III . . . . .      | 23.0                                     | 11.55                                             |
| Armen Grube . . . . .      | 15.3                                     |                                                   |

Som det vil sees af denne Tabel, indtager de i Drift værende Gruber den fornemste Plads med Hensyn til Bredde af Gruben saavel som med Hensyn til Sølvmenge pr. Kvadratlagter. Om man tog Udbyttet fra Kongens og Armen Grube i de senere Aar med, vilde visseligen Udbyttet pr. Kvadratlagter i disse Gruber stille sig overordentlig meget gunstigere. Den Grube, som kommer nærmest efter de i Drift værende Gruber, er Haus Oldenburg, og denne Grubes Gang maa være overfaret i Kristians Stols Niveau og burde her

opsøges, hvis det ikke er en af de Gange, paa hvilke der har været udlænkét nordenfor Gottes Hülfe.

Da Gottes Hülfe in der Noth var optaget, og da der blev Tale om at optage endnu en Grube paa Overberget, havde man Opmærksomheden henvendt paa Haus Sachsen og paa Gabe Gottes Grube, der ligger ikke langt nordenfor Kristians Stol søndre Dagaabning.

Hvis man sammenligner Produktionen i 1700—1790 fra Gabe Gottes Grube med den fra Haus Sachsen, saa ser man, at af fint Sølv i gedigent Sølv, Mittelertz og Scheideerts har den første givet 36821 Mark i 1700—1790, Haus Sachsen 40774. Forskjellen i Produktionen er saaledes ikke saa særdeles betydelig. Om man gennemgaar alle hine Tal i Tabellerne, saa vil det sees, at af alle Gruber har Gabe Gottes leveret den største Produktion i et enkelt Aar, nemlig 7943 Mark i 1727, en Produktion, som end ikke Gottes Hülfe naar i hine 90 Aar.

Om Gabe Gottes beretter Deichman følgende: »Imidlertid var det slet bestilt med Værket, som saa meget beklageligere, da ingen Hjælp var at vente i den da besværlige Krig; men midt i Nøden aabnede sig saa rig en Anbruch i Gabe Gottes Grube, som tilforn ikke havde været, at Værket ikke alene kom af sin Gjæld, men gav endog et temmelig Overskud ved Aarets Slutning. Disse Tidender gjorde og, at Fienden under Baron Löwens Commando, sneege sig igjennem Hackedalen til Ringerige og derfra vilde tage Veien til Kongsberg, men den 16 Martii (1716) om Aftenen, blev dette Korps angrebet af de Norske og næsten ødelagt. Nordberg siger: at Sølv-Verket paa den Tid gav maanedlig 80000 Rdlr. Dette er vel rundelig, om han end mente svenske Penge.

Samme Grube continuerede i 4 å 5 Aar at yde saa stor Velsignelse af sig, at Aaret efter blev Overskud 138000 Rdlr.; 1718, 90000 Rdlr.; 1719, 80000 Rdlr. og 1720 endnu et temmelig Overskud.

Alene 1717 blev bragt fra denne Grube som følger:

|                  | Gedigent Sølv. |        | Mittelerts.             | Scheideerts. |
|------------------|----------------|--------|-------------------------|--------------|
| 1 Maaned         | 28 Mk.         | 4 Lod. | 70 $\frac{1}{2}$ Pd.    | 61 Td.       |
| 2 —              | 138 —          | 8 —    | 857 —                   | 71 —         |
| 3 —              | 224 —          | 13 —   | 1144 $\frac{1}{2}$ —    | 74 —         |
| 4 —              | 227 —          | 5 —    | 1326 —                  | 84 —         |
| 5 —              | 89 —           | 12 —   | 503 —                   | 82 —         |
| 6 —              | 151 —          | 15 —   | 647 $\frac{1}{2}$ —     | 82 —         |
| 7 —              | 268 —          | 10 —   | 666 $\frac{1}{2}$ —     | 82 —         |
| 8 —              | 229 —          | « —    | 611 —                   | 81 —         |
| 9 —              | 278 —          | 7 —    | 1146 —                  | 82 —         |
| 10 —             | 268 —          | 5 —    | 1084 —                  | 81 —         |
| 11 —             | 387 —          | 8 —    | 1086 $\frac{1}{2}$ —    | 80 —         |
| 12 —             | 288 —          | 6 —    | 1160 —                  | 83 —         |
| 13 —             | 480 —          | « —    | 2054 —                  | 87 —         |
| 3004 Mk. 14 Lod. |                |        | 12350 $\frac{1}{2}$ Pd. | 1029 Td.     |

Det er ellers mærkværdigt, at denne Gabe Gottes Grube er ganske forskjellig fra alle de øvrige Kongsbergs Gruber; Gruben ligger med de Sydligste af de Kongsbergske Gruber og istedetfor de øvrige Grubers Arbeide er anlagt paa de fra Østen til Vesten strygende Ganger, er denne anlagt paa selve Fallstenen og et Kisbaand, som stryger med Stenen i Sønder og Nord med et Dohnslag til Øster af  $\frac{1}{4}$  Lachters Mægtighed, hvorved de oversættende dels smale dels 2 til 4 Finger mægtige, Drummer og Gange er overfarne, og derpaa udlænket til Østen og Vesten, endog mod  $\frac{1}{2}$  Lachter udi det liggende af Kisbaandet mod Vesten, og besynderlig at disse Drummer og Gange aldrig har vildet gjort noget godt udi det hængende til Øster. Gruben er opfundet 1661, en 40 Lachter fra Dagen, da man med en Feltort til Vester overfoer nogle fra Nord indkomne Drummer; antraf 1710 og følgende Aaringer de riige og mægtige Anbrucher, som oven meldt, som fandtes 6 à 8 Lachter i det liggende af Baandet



til Vester, hvorved Gruben fik en saadan Vidde, at man for befrygtede Indfald, efter at disse Geschichte paa en 14 å 15 Lachter afkilede sig, maatte indknibe Strosserne og siden gaa under med Feltorter og Qværslag.

Forundringsværdig var det, at disse usædvanlige Anbrucher just aabnede sig paa en Tid, da Regjeringen havde saa mange andre Ting at bestride, og umulig kunde kommet Verket til Hjelp, i Fald det havde behøvet Indskud, men i den Sted ikke allene forsynede sig selv, men endog paa en saa trængende Tid gav et saa considerable Udbyttte af p. p. en 400000 Rdlr.«

Bergmester Holmsen foreslog i 1865 Optagelsen af Gabe Gottes Grube alternativt med Optagelsen af Haus Sachsen. Gabe Gottes Grube vilde blive at farbargjøre og ryddiggjøre fra Dagen af og indtil Christians Stol. Naar Gruben dernæst var karteret, kunde det egentlige Undersøgelsesarbeide paa-begynde, hvilket antoges især at ville blive rettet mod Nord og Øst. Bergmesteren erklærede sig fortrinsvis for Haus Sachsen, hvis ikke samtidig begge kunde komme i Betragtning. Direktionen var enig med Bergmesteren, men tilføiede, at der den Gang selvfølgelig ikke kunde være Tale om Optagelsen af mere end en Grube.

Efterat Haus Sachsen Grube har været i Drift i 10 Aar, og i de sidste tre Aar har givet 4000 til 6600 Mark Sølv aarligt med et Belæg af 44 til 46 Mand, synes der at være god Grund til at tænke paa Optagelsen af Gabe Gottes Grube.

*Underbergsstollen og Underbergets Gruber.* Alle Underbergets Gruber ligger nu forladte, og i Munden af den lange Underbergstol, der løser dem, er der sat en Dam, for at Stollen og Gruberne kan tjene som Vandreservoir for Kongsberg By. Ved denne Foranstaltning har man imidlertid neppe tænkt for altid at stænge Adgangen til Underbergets store Ertsfelt. Spørgsmaalet om Benyttelsen af Underbergsstollen har nemlig været vakt for et Snes Aar siden. Direktør Bøbert

og den sidste Kommission i 1865 var endog i Tvivl, om man ikke burde fortsætte Underbergstollen frem til Haus Sachsen istedetfor at fortsætte Kristians Stol til denne Grube.

Hvis det ved Optagelsen af flere Gruber paa Kongsberg viser sig, at Gruberne i det hele med kraftigere Maskiner, stærkere Sprængmidler o. s. v. giver et rigeligt Udbytte, saa vil sikkerligen en større Plan for Kongsberg Sølvverks Drift benyttet Underbergstollen og dens Stollfløie som Basis, og fortsætte Driften af Underbergstollen til Haus Sachsen, i hvilken Grube, den vil indbringe i større Dyb end Kristians Stol. Paa denne Maade vil der blive istandbragt en Forbindelse med Landets to længste Stoller, og det hele Felt vil være aabnet ved Stoller paa en Længde af over 4700 Lagter; Adgangen til alle de vigtigste Gruber vil være forholdsvis let, naar disse Stoller er ryddet efter sin hele Længde, og al Drift kan koncentreret ved Underberstollens Dagaabning. Unægtelig er Kristians Stols Drift forkvaklet ved det Stolknæ, som er anbragt mellem Armen og Kongens Grube, men det er nu for sent at rette paa denne Feil. Fortsættelsen af Kristians Stol fra Nord, saaledes som Kommissionen af 1851 foreslog det, synes kun at være et Middel til at komme fra en Vanskelighed, og Driften af Stollen fra denne Kant blev ogsaa indstillet, da man havde slaaet sig igjennem til til Svarte Thorstein. Omkostningerne udgjorde 19435 Spd. Da det er tvivlsomt, om Værket faar noget godt af denne Stolort, og da under alle Omstændigheder den Tid, da denne Stolort kommer til Gjennemslag, ligger meget fjernt, saa tør vel dette Forslag om at drive Stollen frem fra Jondalen og indstille Driften fra Syd betragtes som mislykket, saa meget mere, som det gamle Knæ nødvendigvis vilde frembringe et nyt, naar Gjennemslag skeede, hvis man ikke vilde opgive den daværende Stolort fra Kongens Grube mod Gottes Hülfe.

Böbert har udtalt sig for, at Underbergstollen bør optages. I »Nogle Antydninger til Underberg Stollens frem-

tidige Benyttelse« giver han Oplysninger om denne Stol, af hvilke en Del er meddelt tidligere, men som atter bidsættes for Oversigtens Skyld. Den er paabegyndt 1721, og har, naar alle Krumninger medregnes, en Længde af 697 Lagter fra Dagmundingen til Blygangen paa Underberget. Herfra gaa dens ene Sidefløi mod Syd 985 Lagter til Samuels Gruben og 782 Lagter mod Nord indtil 80 Lagter nordenfor Charlotte Amalie. Den har saaledes paa det nærmeste løst samtlige Underbergets Gruber. Den har en Stigning af 6 Lagter ind til Blygangen, men denne Stigning er stærkest i den indre Del af Stollen, saa at det gaar an at rette paa dette. Saalen i Underberg Stollen skal efter Bøbert ligge 20.27 Lagter dybere end Saalen i nordre Kristians Stols Dagaabningen i Jondalen. Markscheidermærket i nordre Kristians Stols Dagmunding skal efter Hansteens og Holmsens Maaling ligge 3.27 Lagter lavere end Mærket i søndre Kristians Stols Dagmunding. Mellem Blygangen paa Underberget og Haus Sachsen paa Overberget er Afstanden efter Uslers Kart omtrent 700 Lagter, medens Afstanden fra Kristians Stolls nuværende Skram i Svarte Thorstein til Haus Sachsen er omtrent 1400 Lager. At løse Haus Sachsen Grube ved Kristians Stol fra Jondalen vilde altsaa medtage omtrent den dobbelte Tid og koste omtrent dobbelt saa meget som at løse denne Grube ved Underbergstollen, og den vilde løse Gruben i et 20 Lagter større Dyb.

Fra Underberg Stollen i Haus Sachsen kunde man løse de andre Gruber paa Overberget i et større Dyb, og man kunde koncentrere al Drift ved Kongsberg By, hvor det nedenfor liggende Terrain frembyder en sjelden bekvem og rigelig Anledning til Alt, hvad der er fornødent til et saadant Etablissement.

Bøbert gjør dernæst opmærksom paa, at Erfaringen gaar ud paa det, at de bedste Erts gange paa Overberget ligger mellem Gabe Gottes Grube og Kronprindsens Grube, og at

Feltet nord for Gottes Hülfe slet ikke er saa daarligt undersøgt. Ved Fremdriften af Kristians Stoll til Gottes Hülfe haabede man at finde nye Gange, eller at finde de gamle Gange ædle i Stollinien. Vistnok siger han, er Udlæknin- ger fra Stollen paa de forhen i Dagen kjendte Gange kun i ringe Grad foretagne; men saameget er vist, at nye lovende Erts gange ikke er autrufne, og han mener, at man ogsaa i saa Henseende vil blive skuffet ved Fortsættelsen af Stollinien fra Jondalen til Haus Sachsen. Men en saadan Undersøgelse af Feltet nord for Haus Sachsen vil ogsaa kunne foregaa fra Underbergstollen af, kun i det forhen omtalte større Dyb. Og vil man lade Underbergstollen komme til gode, hvad man sparer ved ikke at fortsætte Christians Stoll fra Svarte Thorstein sydover, saa kan den drives 700 Lagter til Nord, og da naa 200 Lagter nord for Kronprindsens Grube.

»Det er muligt, at mit Forslag til Underbergsstollens Fortsættelse fortiden og maaske i lang Tid ikke vil finde Bifald. Ikke destomindre er det min urokkelige Overbevisning, at Forslaget tidligt eller seent engang vil blive udført.«

Kommissionen af 1865 siger, at den har været i megen Tvivl om, hvilken af disse Stollers Fortsættelse den burde anbefale, altsaa om en Fortsættelse af Kristians Stol eller af Underbergets Stol bør lægges til Grund for Driften; den anbefaler dog Fortsættelsen af Kristians Stol, saa at den hele Drift blev koncentreret i Saggrænden. Det maa da, bemærker Kommissionen, overlades til Fremtiden, hvorvidt man under anderledes udviklede Forhold vil fortsætte Underbergets Stol til Gruberne paa Overberget.

Underbergstollen er sandsynligvis den dybeste Stol, som vil drives ind paa det kongsbeargske Ertsfelt. Rigtignok kan en endnu dybere Stol indrives fra Labrofos, hvilken med en Længde paa  $\frac{1}{4}$  norsk Mil vilde naa den søndre Del af Overbergets og Underbergets Ertsfelt, efter Böbert i et Dyb 35 Lagter større end Kristians Stols Dagaabning i Saggrænden.

Men om Driften af en saadan Stol til Løsningen af Gruberne vil der vel neppe nogensinde blive Tale, efterat hine store Stoller er drevne paa Underberget og Overberget. Den simpleste og bekvemmeste Plan for Kongsberg Sølvværks Drift, om ingen Stolarbeider paa Overberget var foretagne, vilde vistnok have været den, at Underbergstollen gik fra sin nuværende Dagaabning ind til Blygangen, og herfra forsatte til Haus Sachsen. Ligesom dens to Stolfløie nu løser Underbergets Gruber, kunde to Stolfløie drives fra Haus Sachsen mod Syd og mod Nord. Imidlertid har enhver Tid sine Krav, og det nytter lidet at tale om det, som kunde være gjort. Om Underbergstollen drives ind til Haus Sachsen, saa vil den her indbringe noget dybere end Kristiansstoll, men dette større Dyb vil ikke komme de søndenfor liggende Gruber tilgode, og Fordringen for Kristians Stol ned til Underbergets Stoll vil have sine Ulemper.

Der vil, naar Kristians Stol er drevet ind til Haus Sachsen, opstaa det Spørgsmaal, om Kristians Stol skal fortsættes videre imod Nord. Unægtelig er det meget som taler for, at saa ikke sker. Afstanden fra Haus Sachsen til den nuværende Skram i Kristians Stol ved Svarte Thorstein er ikke mindre end 1402 Lagter. Men Afstanden mellem Haus Sachsen og Blygangen er ikke mere end 652 Lagter efter Kommissionen af 1865. Den betydeligste Grube, som ligger nordenfor Haus Sachsen, er Kronprindsens Grube, og Afstanden mellem disse er 532 Lagter. Kronprindsens Grube vil altsaa kunne løses lettere og dybere ifra Haus Sachsen end ifra Jondals Stollen. Hertil kommer, at Fortsættelsen af Kristians Stol nord for Haus Sachsen og Gjennemslag til Jondals Stollen vil frembringe et nyt Stolknæ, og i det hele taget er der ingen Grund til at brænde sig frem helt til Jondalen, da man intet har at gjøre der. Under disse Omstændtgheder vil der visselig i en ikke fjern Fremtid blive Tale om, at slaa Underbergstollen frem til Overberget.

— Ved Driften af Tunneler og lange Stoller i meget fast Berg er der som bekjendt i senere Aar gjort store Fremskridt ved Anvendelsen af Maskinboring. Stollerne drives paa Kongsberg hovedsagelig endnu ved Fyrsætning afvejlende med Haandboring, hvor Fyr ikke virker godt. Det aarlige Avancement er circa 32 Meter med en Udgift af omtrent 130.5 Kr. pr. løbende Meter i Brydningsomkostninger i Stol med 8 Kvadratmeters Tversnit. Det er et Spørgsmaal om Boring med Maskiner i Stollerne, selv om den faldt kostbarere pr. løbende Meter, alligevel ikke vilde blive billigere, naar Hensyn tages til Renterne af de Penge, der anvendes til Foretagendet, og til den Omstændighed, at man meget hurtigere faar gjort Brug af Stollen. Som Exempel paa, med hvilken Hastighed man formaar at drive Tunneler nutildags, hid sættes følgende:

Mont Cenis Tunnelen blev boret med Sommeillers Maskine og med en Længde paa 12 Kilometer fuldført i 105 Maaneder.

Gothards Tunnelen, som er 15 Kilometer lang, blev boret med Ferroux's og Mac-Keans Maskine i 90 Maaneder.

Arlberg Tunnelen, som forener Schweiz og Østerrige, er 10 Kilometer lang og blev færdig paa 36 Maaneder. Den blev boret med Ferroux's og Brandts Maskine.

Man ser heraf, at Tunnelerne avancerede respektive med 114, 167 og 278 Meter om Maaneden, og da der er to Arbeidspunkter paa hver Tunnel bliver det maanedlige Avancement 57, 83.5 og 139 Meter paa hvert Arbeidspunkt. Kristians Stols Skram rykker frem med omtrent 32 Meter om Aaret, eller 2.66 Meter om Maaneden.

Følgende Tal giver den Hastighed, man daglig opnaaede ved Arlberg og Gothard Tunnelen i Glimmerskifer og Gneis eller i Bergarter, der har en Fasthed nogenlunde som de Kongsbergske.

## Glimmerskifer.

|              |       |       |                        |
|--------------|-------|-------|------------------------|
| Arlberg 1880 | 2.77, | 3.33, | 3.39 Meter i 24 Timer. |
| St. Gothard  | 3.65, | 4.14, | 3.06 Meter i 24 Timer. |

## Gneis.

|              |       |       |                        |
|--------------|-------|-------|------------------------|
| Arlberg 1881 | 4.93, | 4.96, | 4.88 Meter i 24 Timer. |
| St. Gothard  | 2.99, | 2.91, | 4.17 Meter i 24 Timer. |

Helt op til 6 Meter om Dagen blev naaet ved Driften af Arlberg Tunnelen.

Der kan naturligvis ikke blive Tale om ved Driften af de Kongsbergske Stoller at gjøre istand Maskiner og Indretninger saa storartede og kostbare som de, ved Hjælp af hvilke man nu 3 Gange har gjennemboret Alperne. Ved deslige Foretagender sættes alle andre Hensyn tilside for Hensynet til Hastigheden, idet de Jernbanestumper, som skal forenes ved Tunnelen, kun kaster lidet af sig, før Gjennemslaget sker, og hele den i Foretagender anbragte Kapital forbliver uproductiv, før Tunnelen er slaaet igjennem. Men det samme gjælder i nogen Grad Stolarbeiderne paa Kongsberg. Det er klart, at hvis et Stolarbeide skrider langsomt fremad, saa vil Renterne af den i Foretagendet anbragte Kapital gaa helt tabt, indtil Gjennemslag sker, og hvis et Arbeide paa en Stol kræver til Exempel 16 Aar med Fyrsætning og kan fuldføres paa 1 Aar med Boremaskiner, saa bliver Renterne af den anvendte Kapital og den længere Tid, der gaar hen, før Gruberne faar godt af Stollen, af den Betydning, at Hensynet til en billigere Drift for løbende Meter maaske maa træde i Baggrunden. Hvorledes en Kamp mellem den urgamle Bergbrydningsmetode med Fyrsætning og et Arbeide med tidsmæssige Boremaskiner vilde stille sig ved Kongsberg, derom har man, saavidt jeg ved, intet Overslag.

Som almindelig Regel har det gjældt, at Udgifterne pr. løbende Meter er større ved Boremaskiner end ved Haandboring; undertiden er Udgifter 1.5 til 2 Gange saa store. I meget haarde Bergarter erholder man endog en noget min-

dre Udgift for løbende Meter, hvis man ikke tager i Betragtning Renter og Amortisation af den til Anskaffelsen af Maskinerne osv. anvendte Kapital.

Den Hastighed, hvormed Arbeidet udføres, er imidlertid dobbelt saa stor, ja indtil 5 Gange saa stor, og ved Driften af meget lange Tunneler, hvor Hensynet til at faa Arbeidet udført hurtigt helt fortrænger Hensynet til Omkostningerne pr. løbende Meter, har Arbeidet avanceret endnu mange Gange hurtigere. I Regelen gjælder det, at Maskinboring er desto fordelagtigere, jo haardere og fastere Fjeldet er, og da Bergarterne omkring Kongsberg er af første Fasthedsgrad, og da der er Anledning til ved Hjælp af de gennemslaaede Stoller at skaffe Drivkraft for Maskiner til komprimeret Luft, saa er der sikkerlig Grund til at tage Anvendelsen af Bormaskiner specielt ved Stoldriften under Overveielse. Ved Anvendelsen af Boremaskiner er Udgiften til Arbeiderne mindre for løbende Meter trods det, at den enkelte Arbeider betales bedre og trods det, at der anvendes flere Arbeidere. Dette hidrører fra det større Arbeide, som udføres i 24 Timer. Derimod udgjør Udgifterne til Sprengstoffer det dobbelte eller tredobbelte ja mere af Udgifterne til Sprengstoffer med Haandboring. Udgifterne til den komprimerede Luft varierer ifra 2.0 til 18 Kroner pr løbende Meter. Vedligeholdelse af Bor og Maskiner fra 12 til 30 Kroner pr. løbende Meter. Anlægsomkostninger angives til 50000 Kroner for et Angrebspunkt, 90000 for to Angrebspunkter, og 18000 Kroner for hvert nyt Angrebspunkt. Men ved mindre Anlæg er man i senere Aar kommet ned til 20000 Kroner. Omkostningerne pr. løbende Meter angives til 60 til 140 Kroner i Stoller med Tversnit paa 2 til 2,5 Meter og 2 til 2,4 Meter. Man regner 11 til 22 Kroner for hver Kubikmeter i Orter med 4 til 5 Kvadratmeters Tversnit.

Udgifterne med Driften af Kristians Stol pr. løbende Meter udgjorde, som berørt, ifjor 130.5 pr. løbende Meter, og 16



til 17 Kroner pr. Kubikmeter med 8 Kvadratmeters Tversnit i Stollen. Efter dette skulde Driften af Stollen med Bormaskiner falde omtrent lige billig, men man vilde have de store Fordele af den hurtige Udførelse gratis.

I sidste Aar er Kristians Stol avanceret 32.0 Meter med en Udgift af 5902 Kr., hvoraf 4176 i Brydningsomkostninger, eller 130,5 Kroner pr. løbende Meter i Stollen, som netop berørt. Stollen paabegyndtes fra Gottes Hülfe i 1866 og er nu avanceret derfra 597.98 Meter, hvilket udgjør 34.2 M. om Aaret. Hvis vi lægger disse Tal til Grund for en Beregning over, hvilken Tid og Omkostning, der vil medgaa til Driften fra Blygangen til Haus Sachsen,  $652\frac{9}{10}$  Lagter, eller omtrent 1306 Meter, saa sees, at hertil vil behøves 38 Aar med en Udgift af omtrent 170000 Kroner i Brydningsomkostninger, og hvis vi forudsætter, at de samlede aarlige Udgifter ved Stoldriften udgjør Kr. 6000, saa vil Stollen koste 228000 Kr. Hvis Stollen tænkes drevet med Modort fra Haus Sachsen, idet denne Grube forudsættes at have naaet den hertil fornødne Dybde, vil Tiden blive 19 Aar. Hvis vi vil finde et Udtryk i Tal for Fordelene af en hurtig Drift, saa maa der regnes ud, til hvilket Beløb en aarlig Sum af 12000 Kr. betalt aarlig i 19 Aar eller 6000 Kroner i 38 Aar vil være voxet med Renter og Renters Rente til 5 %. 12000 Kroner anvendt aarlig i 18 Aar vil med Renter og Renters Rente være voxet fra 228000 Kr. til 384000 Kroner i 19 Aar, men 6000 i 38 Aar vil voxe til 679000 Kroner. Det sees heraf, at alene Driftskapitalens Forrentning i 38 Aar, vil gjøre en langsom Drift af selve Stollen 3 Gange saa dyr pr. løbende Meter, hvortil kommer, hvad der ved et vel motiveret Stolanlæg er det væsentligste, at man ved selve Gruben ikke faar noget godt af Stollen, før den er slaaet igjennem.

Naar den Tid kommer, at en Del af Kongsberg Sølvværks Overskud anvendes til Optagelse af nye Gruber paa Overberget, og naar de nye og de ældre Gruber vedbliver at

give Overskud, saa bør Gruberne paa Underberget ikke længere ligge øde. Det er selvsagt, at naar Stollen ryddiggjøres, saa er der Anledning til paa en hvilkensomhelst Tid at optage Gruber paa Underberget, og at det er overflødig at bemærke, at dette kan ske aldeles uafhængigt af Spørgsmaalet om Underbergstollens Fortsættelse. En Drift af Underberggruberne vilde imidlertid gjøre en Forbindelse mellem disse Gruber og Overbergets Gruber høist ønskelig, thi da kunde Malmen pukkes i et stort og velindrettet Pukværk ved Kongsberg By og Hytten, hvor der i Fossene er stor Vandkraft disponibel.

Af alle Gruber paa Underberget har der gaaet det største Ord af Segen Gottes Grube, om hvilken det efter Kommissionen af 1833 er bekjendt, at den førte Sølv i sit 284 Lagter dybe Gesænk, Den ligger  $370\frac{7}{8}$  Lagter, regnet efter Underbergstollen, i Syd for Blygangen, og Stollen indbringer i et Dyb af  $68\frac{1}{4}$  Lagter i Gruben. Den naar saaledes med sit Gesænk  $215\frac{3}{4}$  Lagter under Underbergstollen. Kommissionen af 1833 bemærker, at dette store Dyb virkelig maa afskrække fra Grubens Optagelse, da den ikke kan kommes til Hjælp ved nogen dybere Stol end Underbergstollen. Et Dyb paa 400 til 450 Meter er vel en god Dybde, men det er endnu ikke Halvdelen af det Dyb, som er naaet ved Grubedriften nu, og Efterretningerne om Gamle Segen Gottes Grube gaar ud paa, at den har udmærket sig ved en usædvanlig Stadighed med Hensyn til Sølvføring. Som tidligere omtalt, siger Deichman om denne Grube, Segen Gottes, at den har svaret til sit Navn, og at den er en af de gavmildeste og mest bestandige ved dette Værk, der af alle Gruber har sat mest i Dybet og endnu til denne Tid (1777) i Gesænkets viser smeltværdige Ertser, om de alene kunde stoppe de svære paa-gaaende Omkostninger. Den har holdt ved at yde Sølv stadigt, og den fører som omtalt Sølv i sit 284 Lagter dybe Gesænk. At man trods dette svære Dyb vedblev at drive Gruben med hine Tidens Maskiner, som efter Baumann var

svage og allerede for sin Tid forældede, synes at tyde paa en usædvanlig rig Gang. I og for sig kan nutildags hint store Dyb ikke virke saa afskrækkende som i 1833.

Der er mange af de gamle Gruber paa Underberget, paa hvilke Opmærksomheden bør fæste sig, hvis Sølvværkets Drift skal udvides. En Diskussion af dette Spørgsmaal forudsætter imidlertid et nøiagtigt Studium af de i Kongsberg Sølvværks Arkiv opbevarede Efterretninger om de enkelte Gruber.

— Det tør sikkerligen antages, at den her i Forslag bragte Udvidelse af Driften paa Kongsberg vil finde Tilslutning inden Bergetaten saa meget mere, som lignende Forslag er udgaaet fra de ved Kongsberg Værk beskæftigede bergkyndige Mænd. Den Omstændighed, at Gottes Hülfe fortiden ikke giver saa meget Sølv, som den gjorde i gammel Tid, er neppe noget berettiget Motiv til at drive denne Grube med mindre Kraft. Gottes Hülfe in der Noth Grube har en Fortid, der giver store Løfter om dens Fremtid.

Udlænkninger paa et Antal med Skjønsomhed valgte Gange i Kristians Stol er i fuld Overensstemmelse med Planen for det store Stolarbeide, og flere af de Kommissioner, der har været nedsatte, har knyttet de største Forhaabninger til de ved Kristians Stol overfarne Gange.

Optagelsen af Gamle Justits Grube er et Arbeide, som neppe længe bør udsættes, og den Omstændighed, at man i Syttiaarene drev en lang Ort for at naa denne Grubes Gange, viser noksom, at man knytter Forhaabninger til denne Grube, der var den eneste af Overbergets Gruber, der blev holdt i Drift for privat Regning efter Sølvværkets Nedlæggelse i 1805.

Optagelsen af Gabe Gottes Grube er foreslaaet af daværende Bergmester Holmsen samtidig med Optagelse af Haus Sachsen.

Fortsættelsen af Underbergstollen er foreslaaet af Direktør Böbert, og det paa en Tid, da man ikke paa langt nær havde

deslige Hjælpesilder til Stoldriften som nu, da man har det i sin Magt at slaa en Stol igjennem paa ligesaamange Maa-  
neder, som man før brugte Aar.

Tiden for en Udvidelse af Driften ved Kongsberg er sikkerligen bekvem, eftersom Værkets Nettoudbytte synes at være i stigende. Sølvværkets Indtægter var i Aaret 1883—84 Kr. 1055000, hvoraf 193000 Kr. Renter af Driftsfondet og Kr. 857000 af det producerede Sølv (og Kobber). Af disse Indtægter gik Kr. 536000 til Værkets Drift, saa at der bliver et Nettoudbytte af 519000 Kr. For Aaret 1884—85 er der paaregnet en Indtægt af Kr. 1124000 og en Udgift af Kr. 603500, altsaa et Overskud af 520500 Kr. Der er her antaget en Sølvproduktion af 6000 til 6500 Kilogram til en Værdi af omtrent Kr. 845000. Der vil imidlertid efter Bergmesterens Overslag i indeværende Aar kunne blive produceret 8000 Kilogram fint Sølv, hvilket til en Pris af 131 Kr. pr. Kilogram giver Kr. 1048000, eller Kr. 203000 mere i Overskud end paaregnet, og under alle Omstændigheder kan iaar efter Direktionens Opgave en Produktion af 7000 Mark paaregnes.

I femti Aar har Kongsbergs Sølvværk hovedsagelig levet paa Armen og Kongens Grube. Skjønt denne Grube fremdeles vedbliver at give Sølv, saa kan ingen vide, hvor længe Gangene endnu vedbliver at være ædle. I den lange Aarrække, som er hengaaet siden Gottes Hülfe sattes i Drift, er kun en Grube nemlig Haus Sachsen optaget, og denne synes ogsaa at ville give Sølv nogenlunde rigeligt. Sikkerligen i Erkjendelsen af, at det er en usikker Basis, hvorpaa Sølvværket hviler, er der vistnok dannet et Driftsfond paa 4 Millioner Kroner, men Renterne af dette inddrages stadigt i Statskassen, og Driftsfondet har ikke bidraget det allermindste til Optagelsen af nye Gruber eller til en Udvidelse af Driften, baseret paa større Tillid til Nutidens Hjælpesilder. Men fortsætter man Afbygningen af de fortiden ædle Gange uden samtidigt

ved Hjælp af Udbyttet at forøge Antallet af Forsøgsdrifter og uden at aabne nye Felter i de gamle Gruber, der er byggede paa de ædleste Gange, saa kan man i heldigste Tilfælde opnaa endnu i en Del Aar at erholde et Udbytte, som tidligere, men man resikerer en aftagende Produktion og bidrager intet til den Udvikling af Bergværksdriften paa de sølvførende Gange, som man efter femti Aars gode Udbytte og efter de store tekniske Fremskridt i Grubedriften kunde vente.

---

## Ueber die praktische Integration rationaler Bruchfunktionen.

Von

Dr. Elling Holst.

Kein mir bekanntes Lehrbuch geht bei der Integration rationaler Bruchfunktionen weiter, als zur Darstellung der Bruchdekomposition und der näheren Behandlung der somit entstandenen Einzelbrüche, nämlich:

$$1) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, \quad n > 1.$$

$$2) \int \frac{dx}{x-a} = \text{lognat } (x-a).$$

$$3) \int \frac{x \, dx}{((x-a)^2 + b^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{((x-a)^2 + b^2)^{n-1}} \\ + a \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^n}, \quad n > 1.$$

$$4) \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)b^2} \frac{x-a}{((x-a)^2 + b^2)^{n-1}} \\ + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^{n-1}}, \quad n > 1.$$

$$5) \int \frac{x \, dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{2} \text{logn. } ((x-a)^2 + b^2) + \frac{a}{b} \text{arctg. } \frac{x-a}{b}$$

$$6) \int \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \text{arctg. } \frac{x-a}{b}.$$

Statt der vier letzteren Formeln können als häufig nützlicher bekanntlich die folgenden eintreten:

$$3') \int \frac{x dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^n} = -\frac{1}{2(n-1)A} \frac{1}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{n-1}} - \frac{B}{A} \int \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^n}, \quad n > 1.$$

$$4') \int \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^n} = \frac{Ax + B}{2(n-1)(AC - B^2)(Ax^2 + 2Bx + C)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \frac{A}{(AC - B^2)} \int \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{n-1}}, \quad n > 1.$$

$$5') \int \frac{(mx + n) dx}{Ax^2 + 2Bx + C} = \frac{m}{2A} \lognat (Ax^2 + 2Bx + C) = \frac{An - Bm}{A\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{Ax + B}{\sqrt{AC - B^2}},$$

wo die letzte Formel nur dann eine *reelle* Bedeutung hat, wenn  $AC > B^2$ .

Indem die in den Lehrbüchern\*) gewöhnliche Darstellung sich mit der Entwicklung dieser oder ähnlicher Integrale begnügt, wird man, wenn zum Beispiel eine gegebene Bruchfunktion mit Zahlencoefficienten vorliegt, immer auf folgende Operationen verwiesen:

I. *Eine Partialbruchzerlegung*, wo es gilt (durch unbestimmte Coefficienten oder andere Methoden) sagen wir,  $n$  Konstanten zu bestimmen.

II. *Die eigentliche Integration* der  $n$  erhaltenen Einzelbrüche.

---

\*) Dazü andere Werke, vor Allem die *Abel*-schen Arbeiten, die allgemeinste Form explicite darstellen, kann die Behauptung nicht entkräften, dass die gewöhnliche Darstellung in den für den Unterricht bestimmten Lehrbüchern, an dem bemerkten Mangel leidet.

Jeder der solche Rechnungen durchzuführen hat, wird bestätigen, dass namentlich der zweite Theil dieser Operationen ebenso mechanisch als unerquicklich ist. Ich glaube daher, dass die Lehrbücher die Theorie etwas mehr abrunden sollten, und schlage namentlich vor mit Hülfe der obigen oder ähnlicher Formeln *das vollständige Integral a priori bis auf näher zu bestimmende Konstanten anzugeben* und nachher *durch Differentiation und Vergleichung mit dem gegebenen Differential die Konstanten zu bestimmen.*

Man hat dann kaum weitläufigere Rechnungen als bei der obigen Operation I, und hat damit *schon das ganze Integral erledigt.*

Um die Form des Integrals *a priori* angeben zu können, braucht man nur ein Paar einfache Regeln, welche theils aus der Partialbruchtheorie, theils aus den Integralformeln für die Einzelbrüche ohne weiters hervorgehen.

Dieselben lauten:

Wenn in dem echten rationalen Bruche  $\frac{f(x)}{F(x)}$  der Nenner vom Grade  $n$  ist, besteht das Integral

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$$

im Allgemeinen aus der Summe dreier verschiedener Arten von Gliedern, nämlich:

1) *Ein algebraisches Glied:* ein echter rationaler Bruch, dessen Nenner das Product aller *mehrfachen* Faktoren in  $F(x)$  ist, jeder erhoben in eine um eins niedrigere Potenz Faktor also, wenn man will: ein nach derselben Regel von *allen* verschiedenen Faktoren des Nenners gebildetes Produkt.

2) Eine Reihe Glieder, gebildet aus den mit näher zu bestimmenden Konstanten multiplicirten *natürlichen Logarithmen* aller verschiedenen kleinsten reellen Faktoren von  $F(x)$ .

3) Eine Reihe Glieder, gebildet aus gewissen mit näher zu bestimmenden Konstanten multiplicirten *Arctg-Ausdrücken*,



nämlich für jeden kleinsten reellen Faktor in  $F(x)$ , von der Form

$$Ax^2 + 2Bx + C, \quad AC > B^2$$

ein Glied:  $\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg.} \frac{Ax + B}{\sqrt{AC - B^2}}.$

Die Richtigkeit dieser Regeln geht unmittelbar aus der Partialbruchzerlegung und den oben gegebenen Formeln hervor, und die Regeln selbst schliessen sich somit einfach der in jedem Lehrbuche gegebenen Theorie an. Ein Paar Beispiele werden ihren Nutzen darlegen.

$$1) \int \frac{3x^2 + 5}{(x-2)^3(x-3)^2} dx = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-2)^2(x-3)}$$

$$+ D \cdot \lognat(x-2) + E \cdot \lognat(x-3) + \text{Integral.konst.}$$

Diese vorläufige Gleichung wird differentiirt und der gemeinsame Nenner  $(x-2)^3(x-3)^2$  fortgeschafft. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5 &\equiv (x^2 - 5x + 6)(2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C)(3x - 8) \\ &+ D(x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36) \\ &+ E(x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24). \end{aligned}$$

Weil man hier sogleich sieht, dass  $D + E = 0$ , können die beiden letzten Glieder vereinfacht werden und man bekommt:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5 &\equiv A(-x^3 - 2x^2 + 12x) \\ &+ B(-2x^2 + 3x + 6) \\ &+ C(-3x + 8) \\ &+ D(-x^3 + 7x^2 - 16x + 12); \end{aligned}$$

das heisst:

$$\begin{aligned} A &+ D &= 0 \\ -2A - 2B &+ 7D &= 3 \\ 12A + 3B - 3C - 16D &= 0 \\ 6B + 8C + 12D &= 5. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems ist:

$$\begin{aligned} A = -D = E &= -78, \\ B &= \frac{699}{2}, \quad C = -\frac{757}{2}. \end{aligned}$$

Das gesuchte Integral wird somit:

$$\frac{-156x^2 + 699x - 757}{2(x-2)^2(x-3)} + 78 \operatorname{lognat} \frac{x-2}{x-3} + \operatorname{Integr.konst.}$$

$$2) \quad \int \frac{3x^3 dx}{x^6 - 1}$$

Die Faktoren von  $x^6 - 1$  sind

$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Man kann somit a priori schreiben:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 dx}{x^6 - 1} = & A \operatorname{lognat} (x-1) + B \operatorname{logn.} (x+1) + C \operatorname{logn.} (x^2 + x + 1) \\ & + D \operatorname{logn.} (x^2 - x + 1) + \frac{E}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg.} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ & + \frac{F}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg.} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{Integr.konst.}, \end{aligned}$$

woraus nach Differentiation und Multiplikation mit  $(x^6 - 1)$ :

$$\begin{aligned} 3x^3 = (x^6 - 1) \left( \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{(2x+1)C}{x^2+x+1} + \frac{(2x-1)D}{x^2-x+1} \right. \\ \left. + \frac{E}{x^2+x+1} + \frac{F}{x^2-x+1} \right) \end{aligned}$$

$$\equiv A(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$+ B(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$+ C(2x^5 - x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1)$$

$$+ D(2x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1)$$

$$+ E(x^4 - x^3 + x - 1)$$

$$+ F(x^4 + x^3 - x - 1)$$

$$\circ: \quad A + B + 2C + 2D = 0 \quad (1)$$

$$A - B - C + D + E + F = 0 \quad (2)$$

$$A + B - C - D - E + F = 3 \quad (3)$$

$$A - B + 2C - 2D = 0 \quad (4)$$

$$A + B - C - D + E - F = 0 \quad (5)$$

$$A - B - C + D - E - F = 0 \quad (6)$$

Addirt man z. B. sämtliche Gleichungen, so bekommt man:

$$A = \frac{1}{2}$$

Bildet man (1) — (2) + (3) — u. s. w., findet man:

$$B = \frac{1}{2}$$

Hierauf giebt (1) ± (4):  $C = D = -\frac{1}{4}$

Ebenso giebt (2) und (5) — (3):  $E = -F = -\frac{3}{4}$ .

Das Integral lautet also:

$$\frac{1}{2} \operatorname{lognat} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \operatorname{arctg.} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg.} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{Integr.konst.}$$

oder:  $\frac{1}{2} \operatorname{lognat} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arctg.} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{Integr.konst.}$

# Die neueren Untersuchungen über das Hämoglobin und das Methämoglobin.

Von

Jac. G. Otto,

Assistent am physiologischen Institut zu Christiania.

(Vortrag, gehalten in der physiologischen Sektion des internationalen Aerzte-  
kongresses zu Kopenhagen 1884.)

---

Nachdem durch die bahnbrechenden Untersuchungen von Hoppe-Seyler die Bedeutung des Blutfarbstoffs für den Gasaustausch im Tierkörper festgestellt worden war, hat die wissenschaftliche Forschung sich sehr viel mit dem normalen Blutfarbstoff — dem Hämoglobin — und seinen Derivaten beschäftigt. Die Kenntnis derselben ist dementsprechend in den letzten Jahren sehr fortgeschritten, und obgleich wichtige Punkte bisher noch unaufgeklärt geblieben sind, darf man wohl gegenwärtig den Blutfarbstoff als eine der best studierten und bekannten Substanzen des tierischen Organismus bezeichnen. Einen kurzen Ueberblick über den jetzigen Stand unserer Kenntnis dieses wichtigen Stoffs werde ich mir im folgenden zu geben erlauben.

Was zuerst die chemische Zusammensetzung des Hämoglobins betrifft, so sind die Untersuchungen darüber auf lange noch nicht als abgeschlossen zu betrachten. Gewissermassen sind in der letzten Zeit bedeutende Fortschritte gemacht, die Sache hat aber ihre eigentümlichen Schwierigkeiten, die wir mit der heutigen Hilfsmitteln kaum völlig zu überwinden vermögen. Namentlich gilt dies von den elementaranalytischen

Ergebnissen, die bei sämtlichen — mit einer einzigen Ausnahme — untersuchten Hämoglobinen durchaus dieselben sind; wegen der hohen Molekulargröße der fraglichen Körper darf ihnen aber kein allzu großes Gewicht beigelegt werden. Wir waren deshalb bis vor kurzem nicht im stande mit einiger Bestimmtheit zu entscheiden, ob der normale Blutfarbstoff der verschiedenen Tierspezies identisch ist oder nicht; die neueren Beobachtungen haben jedoch das letztere sehr wahrscheinlich gemacht. Als eine der ergiebigsten Untersuchungsmethoden sowohl in qualitativer wie in quantitativer Beziehung hat sich die Spektralanalyse und die Spektrophotometrie erwiesen, und wir verdanken ihr viele Aufschlüsse über die näheren Eigenschaften der Blutfarbstoffe. Als Resultat einer Reihe von Untersuchungen von Hüfner, von Noorden und mir hat sich ergeben, dass sämtliche bis jetzt untersuchten Hämoglobine in spektrophotometrischer Beziehung völlig identisch sind. Dies ist um so mehr auffallend, als Kossel und ich nachgewiesen haben, dass wenigstens eines der Hämoglobine — das Pferdehämoglobin — eine von den übrigen ziemlich abweichende Zusammensetzung hat, was neuerdings auch von Buchler bestätigt ist, obgleich die spektrophotometrischen Konstanten keine Abweichungen von der Norm zeigen. Man kann allerdings diese Thatsachen so deuten, dass die färbende Gruppe der verschiedenen Hämoglobine dieselbe sei, während das übrigbleibende Komponent den Unterschied bedinge, aber auch eine solche Annahme reicht kaum zur Erklärung sämtlicher experimenteller Ergebnisse hin. Die exakten Untersuchungen von Hüfner und seinen Schülern haben nämlich die Sauerstoffsättigungskapazität des Hämoglobins als Funktion seines Eisengehalts festgestellt. Nun liegt aber kaum ein Grund vor, den Eisengehalt des Hämoglobins als der färbenden Gruppe desselben nicht angehörig zu betrachten; und demzufolge sollte nach obiger Voraussetzung der Eisengehalt und die Sauerstoffsättigungskapazität sämtlicher Hämoglobine

dieselbe sein, was aber thatsächlich nicht der Fall ist. Entweder muss man also annehmen, das der Eisengehalt nicht allein der färbenden Gruppe angehörig ist, oder dass dieselbe nicht in sämtlichen Hämoglobinen identisch ist, was sich doch so schwierig mit den spektrophotometrischen Ergebnissen vereinigen lässt, dass man vorläufig wohl die zuerst angeführte Hypothese gelten lassen dürfte.

Aus der Sauerstoffsättigungskapazität und der elementaren Zusammensetzung der Hämoglobine lässt sich das Molekulargewicht und die empirische Formel derselben berechnen, leider zwar nicht mit voller Genauigkeit, aber immer genau genug, um zu zeigen, dass die in dieser Beziehung untersuchten Hämoglobine — Hunde-, Pferde- und Schweinehämoglobin — nicht dasselbe Molekulargewicht haben.

Aus allen den neueren Versuchen ist man somit wohl vorläufig wenigstens mit groszer Wahrscheinlichkeit zu schliessen berechtigt, dass die Hämoglobine verschiedenen Ursprunges verschieden sind, obgleich sie sich in spektrophotometrischer Beziehung durchaus identisch erwiesen haben.

Die nächste Frage, die uns bei den normalen Blutfarbstoffen interessiert, ist die Quantität, in welcher sie im Blute vorkommen. Es liegen hier sehr zahlreiche Analysen nach verschiedenen Methoden vor, von welchen die meisten aber mit Fehlerquellen behaftet sind. Ohne indess hierauf weiter einzugehen, möchte ich mir nur erlauben die Aufmerksamkeit auf die von Vierordt zuerst eingeführte und später von Hüfner vorzüglich ausgebildete spektrophotometrische Methode zu lenken. Eine mehrjährige Erfahrung und die fast tägliche Benützung derselben hat mir ihre grosze Bedeutung klargestellt, indem sie eine grosze Einfachheit der Ausführung mit Exaktheit der Resultate in der wünschenswertesten Weise vereinigt. Wen man die nötige Uebung darin erworben hat, steht sie, nach meinen vergleichenden Bestimmungen sowohl

an reinen Hämoglobinlösungen wie an Blut, sämtlichen übrigen vorgeschlagenen Methoden weit voraus und gestattet, was grade von Wichtigkeit ist, die Bestimmung des Hämoglobingehaltes des Blutes in einer so minimalen Blutquantität, dass man dieselbe dem blutärmsten Individuum ohne Nachteil entziehen kann, indem ein einziger Bluttröpfchen, durch einen Stich in das Ohr erhalten, vollständig genügt. Zahlreiche Hämoglobinbestimmungen an gesunden Menschen beiderlei Geschlechts haben mir auf diese Weise einen mittlern Gehalt von 14,5 % Hämoglobin bei Männern, 13,3 % bei Weibern ergeben. Ausserdem besitzt die spektrophotometrische Methode noch den Vorzug, das man mittels derselben gleichzeitig den Gehalt an Oxyhämoglobin und Hämoglobin bestimmen kann. Bekanntlich herrschen in dieser Beziehung verschiedene Ansichten, was das arterielle Blut betrifft, indem Hoppe-Seyler u. a. glauben, dass das Arterienblut völlig mit Sauerstoff gesättigt ist, Pflüger u. a. dagegen, dass es neben Oxyhämoglobin auch noch kleine Mengen reduzierten Hämoglobins enthält. Meine eigene Erfahrung geht in derselben Richtung wie die Pflüger's, indem ich in dem arteriellen Blut von Hunden stets etwa 1 % reduziertes Hämoglobin gefunden habe, was auch mit Hüfner's Erfahrungen übereinstimmt. Auf diese Weise kann man sogar ohne Auspumpen und Gasanalyse direkt den Sauerstoffgehalt des arteriellen und venösen Blutes bestimmen, indem man die gefundene Oxyhämoglobinquantität nur mit der ein für allemal festgestellten Sauerstoffsättigungskapazität des Hämoglobins — 1,202 nach Hüfner — zu multiplizieren braucht, um gleich den Sauerstoffgehalt bei 0 ° C und 1 m Druck zu erhalten. Mehrere Kontrolbestimmungen haben mir ergeben, dass die so gefundenen Werte vollständig mit den durch Auspumpen und Gasanalyse erhaltenen übereinstimmen, so dass kein Zweifel an der Richtigkeit der Resultate herrschen kann, obgleich einzelne Stimmen sich gegen die Anwendbarkeit der spektro-

photometrischen Methode überhaupt erhoben haben. Die Verwertung der Spektrophotometrie zur gleichzeitigen Bestimmung zweier Farbstoffe neben einander ist in der letzten Zeit auch von Hüfner und Külz zum feststellen der Quantität Kohlenoxyd, welche das Blut in Berührung mit einer kohlenoxydhaltigen Atmosphäre aufnimmt, angewandt worden, und ich selbst habe sie zur Bestimmung des Sauerstoffgehaltes im Methämoglobin benutzt. Mittels der Spektrophotometrie kann man sich auch, was ich wiederholt gemacht habe, von der Richtigkeit der Angabe Heidenhain's überzeugen, dass das venöse Blut farbstoffreicher als das arterielle ist. Der Wert der Spektrophotometrie zeigt sich übrigens vielleicht am besten dadurch, dass in den letzten 7 Jahren nicht weniger als 4 verschiedene Konstruktionen zweckmäßiger Spektrophotometer vorgeschlagen worden sind, von welchen die von Vierordt und von Hüfner die am meisten verbreiteten sind, so wie der von Hüfner wegen Einfachheit des Gebrauchs wie Exaktheit der Resultate unbedingt den Vorzug verdient.

---

Unter den Derivaten der normalen Blutfarbstoffe hat sich besonders das sogenannte Methämoglobin des allgemeinen Interesses erfreut. Es wurde zuerst von Hoppe-Seyler als spontanes Zersetzungsprodukt des Hämoglobins beobachtet und bald nachher auch von anderen Forschern gefunden. Anfangs wurde die selbständige Existenz oder Nichtexistenz desselben ziemlich lebhaft diskutiert, weil es in spektralanalytischer Beziehung eine grosse Aehnlichkeit mit dem Hämatin in saurer Lösung besitzt, nach und nach wurde aber dessen substantielle Natur mehr und mehr klar, bis es schliesslich im J. 1882 Hüfner und mir gelang, den endgiltigen Beweis dafür zu liefern, indem wir das Methämoglobin aus Schweineblut krystallinisch darstellten und seine chemischen und physikalischen Eigenschaften näher studierten. Später



ist es auch gelungen, das krystallinische Methämoglobin aus anderen Blutarten (Pferde- und Hundeblood) zu gewinnen, und es hat sich dann gezeigt, dass die Methämoglobine verschiedenen Ursprungs sich in keiner Weise weder chemisch noch physikalisch verschieden verhalten. Jedoch wird es wahrscheinlich erscheinen, dass ebenso viele Methämoglobine wie Hämoglobine existieren, unter der Voraussetzung, dass die Hämoglobine aus verschiedenen Blutarten nicht identisch sind. Indess fehlen bis jetzt alle Beweise für die Verschiedenheit der Methämoglobine.

Das Methämoglobin unterscheidet sich bekanntlich in zweierlei Beziehungen scharf von dem zugehörigen Oxyhämoglobin, erstens durch sein Spektrum, zweitens dadurch, dass es keinen beim Auspumpen austreibbaren Sauerstoff enthält. Dass es jedoch etwas Sauerstoff in lockerer Bindung besitzt, haben Hüfner und Külz bewiesen, welche fanden, dass die Einwirkung von Stickoxyd das Methämoglobin in Stickoxydhämoglobin umwandelt unter Bildung von salpetriger Säure aus dem überschüssigen Stickoxyd, d. h. dass das Stickoxyd einen gewissen Teil des Sauerstoffs des Methämoglobins austreibt und ersetzt. Es wurde nun die Frage sehr lebhaft diskutiert, ob das Methämoglobin mehr oder weniger Sauerstoff als das zugehörige Oxyhämoglobin enthält; dass es sauerstoffreicher als das reduzierte Hämoglobin ist, geht schon daraus hervor, dass es mit reduzierenden Mitteln behandelt in das letztgenannte übergeht. Hoppe-Seyler u. a. haben nun gefunden, dass diese Reduktion direkt stattfindet, und schlieszen daraus, dass das Methämoglobin sauerstoffärmer als das Oxyhämoglobin ist, während Jäderholm, Saarbach u. a. der gegenteiligen Ansicht huldigen, gestützt auf ihre Erfahrungen, dass das Methämoglobin bei der Reduktion zuerst Oxyhämoglobin und dann reduziertes Hämoglobin bildet. Wie so oft liegt auch hier die Wahrheit in der Mitte, indem ich (Februar 1883) nachgewiesen habe, dass das Methämo-

globin gleichviel Sauerstoff wie das zugehörige Oxyhämoglobin enthält, was auch die früheren entgegengesetzten Resultate genügend erklären kann. Die Methode, welcher ich mich dazu bediente, bestand in der Auspumpung einer Oxyhämoglobininlösung von bekanntem Gehalt, die während des Auspumpens teilweise in Methämoglobin übergeführt wurde, nachheriger spektrophotometrischer Bestimmung der beiden Farbstoffe und Vergleichung des »verschwundenen« (d. h. in Methämoglobin übergeführten) Oxyhämoglobins mit dem erhaltenen Gasvolum. Es stellte sich dann heraus, das die verschwundenen Mengen Oxyhämoglobin und Sauerstoff einander völlig entsprachen, woraus sich der Schlusssatz ergibt, dass Oxyhämoglobin und Methämoglobin gleichviel Sauerstoff enthalten, welcher nur in dem Methämoglobin fester gebunden als im dem Oxyhämoglobin ist. Dasselbe Resultat wurde gleich nachher von Hüfner und Külz durch eine ganz andere Methode erhalten, indem sie die durch Einwirkung von Stickoxyd auf gleiche Mengen Oxy- und Methämoglobin gebildete salpetrige Säure verglichen. Dies geschah mittels Zersetzung der letzteren durch Harnstoff und Messung des freigebliebenen Stickstoffvolums, welches sie bei beiden Stoffen gleich fanden. Es kann somit kaum ein Zweifel mehr über die Richtigkeit dieses Resultates herrschen.

Damit dürften wohl vorläufig die Untersuchungen über die chemische Natur des Methämoglobins als abgeschlossen betrachtet werden, indem gegenwärtig kaum zu hoffen ist, einen nähern Einblick in die Konstitution derartiger Körper zu gewinnen.

Eine spätere, physiologisch sehr interessante Beobachtung hat jedoch v. Mering gemacht. Er wies nämlich nach, dass keine Methämoglobinbildung in defibriertem Blute durch die gewöhnlichen methämoglobilbildenden Reagentien vor sich geht, solange die Blutkörperchen noch erhalten sind, dass

dagegen eine solche gleich eintritt, sobald dieselben durch Wasser oder andere Mittel zerstört wurden. Es folgt hieraus mit groszer Wahrscheinlichkeit, dass die Methämoglobinbildung im Organismus erst dann geschehen kann, wenn ein Teil der Blutkörperchen zu grunde gegangen ist.

---

## Et bidrag til den absolute geometri.

Af

AXEL THUE.

---

Tager man for sig et hvilket som helst matematisk theorem, viser det sig, at dets begrundelse er bygget paa visse forudsætninger, de saakaldte aksiomer, ved hvilke man i regelen bliver staaende.

Disse aksiomer, som ved første øiekast ser temmelig indholdsløse og trivielle ud, vil ved et nøiere studium fremtræde i et eiendommeligt lys, der lader os ane en hel verden af mærkelige foreteelser.

Det kan saaledes nok være umagen værd, at trodse de store vanskeligheder, som studiet af disse særdeles abstrakte gjenstande frembyder, for om mulig at sprede en del af det mørke, der endnu hviler over dette lidet kjendte omraade. Det er dog ikke vor mening, ialfald ikke i denne afhandling, at give nogen udtømmende behandling af de enkelte geometriske aksiomer og deres indbyrdes sammenhæng eller endog blot at anføre alle de forudsætninger, vi gaar ud fra.

Vi vil her kun til belysning af parallelaksiomet undersøge, hvorledes enkelte af de fundamentale sætninger i den sædvanlige geometri bliver at udtale, naar dette axiom sløifes.

Af de anvendte definitionsegenskaber og aksiomer skal vi særskildt fremhæve følgende:

En ret linie er fuldkommen bestemt ved to punkter.

Den kan bringes til at gaa gjennem ethvert opgivet punktpar.

Den er ubegrændset uden at løbe tilbage i sig selv.

Forbindes to vilkaarlige punkter i et plan med en ret linie, vil denne i hele sin udstrækning ligge i planet.

En ret linie gjennem et punkt indenfor en lukket plan kontur og i dennes plan vil i hvert fald skjære denne i to punkter.

Alle rette linier er kongruente.

Da nemlig alle rette linier kan bringes til at gaa gjennem et hvilket som helst punktpar, saa følger heraf, at de ogsaa kan bringes til at gaa gjennem et fælles bestemmende punktpar. De maa følgelig alle være kongruente.

Heraf indsees igjen med lethed, at et stykke af en ret linie maa kunne forskyves langs denne.

Blandt de øvrige anvendte aksiomer mærke vi os særlig kongruentseaksiomerne samt følgende to:

Et stykke af en ret linie kan lægges saaledes om, at endepunkterne bytter plads.

En vinkel kan lægges saaledes om, at benene bytter plads.

1. To rette linier i samme plan lodrette paa en og samme tredie kan ikke skjære hinanden.

Paa grund af de fremkomne kongruente figurer vilde nemlig i modsat fald følge, at de to rette linier fik to punkter fælles.

2. Intet triangel kan have to stumpe vinkeler.

Hvis nemlig saa var, kunde man inde i triangellet opreise perpendicularærer fra det fælles bens endepunkter, hvilke perpendicularærer ifølge de opstillede aksiomer maatte skjære hinanden.

Vinklerne ved grundlinien i et ligebenet triangel er saaledes efter dette mindre end en ret.

3. Summen af to sider i et triangel er større end den tredje \*).

Trianglet være  $pqr$ .

Var nu til eksempel:

$$pq + qr < pr$$

og man saa paa  $pr$  afsatte punkterne  $p'$  og  $r'$  saaledes at:

$$pp' = pq \text{ og } rr' = rq,$$

da fik man et triangel  $p'qr'$  med de to stumpvinkler  $qp'r'$  og  $qr'p'$ , eftersom disses nabovinkler bliver vinklerne ved grundlinien i de to ligebenede triangler:  $qpp'$  og  $qrr'$ .

$$\text{Var: } pq + qr = pr$$

da kunde ikke begge vore to ligebenede triangler have vinklerne ved grundlinien mindre end en ret.

Vi maa følgelig have:

$$pq + qr > pr.$$

Heraf faar man da paa vanlig vis, at af to polygoner med konkave vinkler og hvoraf den ene omslutter den anden, der har den yderste den største omkreds.

4. Summen af vinklerne i et triangel er ikke større end to rette.

Trianglet være  $pqr$  og  $m$  og  $n$  midtpunkterne for de to sider  $pq$  og  $rq$ .

Paa den rette linie gennem  $m$  og  $n$  afsættes et stykke  $no$  lig  $nm$ . Vi har da paa grund af kongruentseaxiomet at:

$$ro = qm = mp.$$

Endvidere bliver vinklerne  $mor$  og  $omp$  supplementvinkler.

Vi kunne altsaa i det uendelige lægge firkanter som  $pmor$  ved siden af hinanden langs linien  $mn$ , saaledes at siderne  $pr$  danner en uendelig bruktet linie, og hvor vinkelen mellem to sammenstødende stykker, som man let ser, er lig summen af trianglets vinkler.

\*) Dette raisonnement er en af Dr. Elling Holst foretagen simplifikation af mit oprindelige.

Var nu denne vinkelsum større end to rette, saa blev altsaa ifølge den foregaaende sætning denne brukkede linie mindre end den øvrige kontur af den figur, som firkant-rækken danner.

Bemærker vi endvidere, at en ret linie gennem to punkter er kortere end en hvilken som helst brukkede linie gennem de samme to punkter, da faar vi, naar firkanternes antal betegnes med  $k$ :

$$k. pr < pq + k. mo$$

og

$$k. mo < pq + k. pr$$

eller

$$pr - mo < \frac{pq}{k}$$

$$mo - pr < \frac{pq}{k}$$

Da nu  $k$  kan voxe over alle grændser, saa sluttes heraf at:

$$pr = mo.$$

Under forudsætning af, at vor sats er urigtig, vil altsaa i den fremkomne firkant de modstaaende sider være lige lange, og da nu summen af et par hosliggende vinkler er to rette, da maa jo paa grund af kongruentseaxiomet det samme være tilfælde med summen af de to andre vinkler, der just er lig summen af vinklerne i triangellet.

Herved er satsen bevist.

Man mærke sig ovenstaaende slutningsform, en slutningsform, der hyppig viser sig ved problemer af denne art.

For nemlig at bevise en sætning, viser man, at den antagelse, at sætningen er urigtig, netop fører til, at sætningen er rigtig.

5. Naar to sider i et triangel varierer kontinuerlig, da er det samme tilfælde med den tredie side.

Denne sides variation bliver nemlig, som man ser, mindre end summen af de to andre siders variationer, eftersom en ret linie er kortere end enhver brukket linie mellem de samme to punkter.

Naar en vinkels ene ben bevæger sig, varierer vinkelen kontinuerlig.

Gaar man nemlig ud fra, at den rette linie er kontinuerlig, faaes, at enhver vinkel kan halveres: idet man da blot behøver at afsætte ligestore stykker paa vinkelens ben og derpaa drage en linie, der halverer den rette linie gjennem de afsatte stykkers ikke sammenfaldende endepunkter.

Ifølge kongruentseaxiomet bliver nu denne halveringslinie ogsaa vinkelens halveringslinie.

Der maa følgelig gives vinkler af en hvilkensomhelst størrelse mellem nul og  $\pi$  og fire rette.

Dette i forbindelse med, at en vinkel, hvis ben ligger udenfor en anden vinkels, er større end denne, leverer vor sætning.

Naar en ret linie bevæger sig paa en hvilkensomhelst maade, da danner den en kontinuerlig vinkel med en fast ret linie, som den skjærer.

Liniernes skjæringspunkt kan nemlig tænkes som fast, idet man jo har, at vor faste rette linie bliver den samme, om den forskyves langs sig selv.

Af de ovenfor opstillede sætninger følger nu med letthed at: et triangel kan ved en kontinuerlig variation af siderne og vinklerne gaa over til et hvilketsomhelst andet opgivet.

6. Er summen af vinklerne i et triangel to rette, da er det samme tilfælde med alle triangler.

Fra de tre hjørner nedfældes perpendicularer paa en ret linie, der halverer to af siderne. Disse perpendicular-



rer sees nu paa grund af de fremkomne kongruente triangler at være lige store.

Den ved to af perpendicularererne dannede firkant har altsaa to ligestore modstaaende sider, der danner rette vinkler med den triangelsiderne halverende side.

Firkantens to andre vinkler maa følgelig ogsaa være lige store og deres sum lig summen af vinklerne i trianget; hvilket indses ved simple kongruentsebetragtninger.

Paa grund af symetrien faar man ogsaa, at den linie, der halverer firkantens to andre modstaaende sider, maa staa lodret paa disse.

Vi har altsaa den sætning, at perpendiculareren paa midten af en side i et triangel stedse staa lodret paa forbindelseslinien mellem de to andre siders midtpunkter.

Var nu summen af vinklerne i vort triangel to rette, da var altsaa alle vinkler i firkanten rette; og ved sammensætning af saadanne firkanter kunde man igjen faa firkanter af samme art.

Bemærker vi nu, at enhver firkant, der har alle sine vinkler rette, deles ved en linie, der halverer to modstaaende sider i to kongruente firkanter med den samme egenkab, da er det klart, at i enhver firkant, hvor to modstaaende sider er lige store og staa lodrette paa en af deres mellemiggende sider, der er summen af de to andre vinkler to rette.

Men herved er jo vor sats bevist.

7. Af de to forangaaende sætninger følger nu, at er summen af vinklerne i et triangel større end to rette, da gjælder det samme for alle triangler. Var nemlig summen af vinklerne i et triangel mindre end to rette, da kunde man altsaa ved en kontinuerlig variation af trianget overføre det i et triangel, hvor summen af vinklerne var større end to rette.

Vort triangel har følgelig et steds maattet have en vinkelsum lig to rette, hvilket altsaa er umuligt.

Paa grundlag heraf vil vi give nok et bevis for at summen af vinklerne i et triangel ikke er større end to rette.

Trianglet være  $pqr$ . Paa dettes sider stilles tre andre dermed kongruente, saaledes at hvert af de tre triangler faar en side fælles med det fjerde og saaledes at intet af dem ligger symmetrisk mod dette triangel.

De tre triangler frie hjørner være henholdsvis  $p' q' r'$ . I den fremkomne sexkant:  $pq'rp'qr'$  er nu vinklerne  $p, q, r$  ligestore og lig summen af vinklerne i vort triangel.

Var nu denne vinkelsum større end to rette, da vilde man ved at forbinde  $p', q'$  og  $r'$  ved rette linier faa et triangel, der laa helt udenom vore fire kongruente.

I modsat fald vilde man nemlig faa tre triangler, hver med en vinkel større end to rette, hvilket igjen naar man forlænger et af denne vinkels ben, vilde lede til, at man fik to hinanden i to punkter skjærende rette linier, der ikke faldt sammen.

Summen af vinklerne i trianglerne  $pqr$  og  $p'q'r'$  være respektive:

$$2R + n \text{ og } 2R + m$$

Summen af vinklerne i de tre triangler  $r'qp'$  o.s.v. være

$$6R + k$$

Man har da:

$$2R + m + 12R = 4(2R + n) + 6R + k$$

eller 
$$n = \frac{m}{4} - \frac{k}{4}$$

eller 
$$n < \frac{m}{4}$$

Ved nu at foretage samme operation med triangel  $p'q'r'$  som med triangel  $pqr$  og fortsætte saaledes i det uendelige saa faaes:

$$m < \frac{m_1}{4}, m_1 < \frac{m_2}{4}, \dots, m_{p-1} < \frac{m_p}{4}$$

eller 
$$m < \frac{m_p}{(4)^p}$$

eller

$$n < \frac{m_p}{4^{p+1}}$$

Da nu  $m_p < 2R$ , saa indsees at  $n$  er mindre end enhver opgiven størrelse.

Den forudsætning altsaa, at summen af vinklerne skulle være større end to rette, fører saaledes netop til at summen er to rette.\*)

8. Ved en fra det foregaaende forskjellig betragtning kan vi paavise nogle grændseværdier større end to rette, som vinkelsummen ikke kan overskride.

Lad os til exempel paavise, at vinkelsummen i et ligesidet triangel ikke kan overskride  $2\frac{2}{3}$  rette.

I modsat fald, maatte der nemlig existere et ligesidet triangel, hvor vinkelsummen netop var  $2\frac{2}{3}$  rette, eftersom man ved at lade det oprindelige triangels sider kontinuerlig nærme sig til at skjære hinanden i et punkt vilde havde at vinkelsummen fra at være større end  $2\frac{2}{3}$  rette kontinuerlig nærmede sig mod to rette.

Af vort saaledes erholdte triangel kan der nu lægges fem om hvert punkt i planet; og ved at fortsætte saaledes med at lægge slige triangler ved siden af hinanden, vilde man, som det let sees efter den 19de lægning have faaet som kontur for den dannede polygon et triangel kongruent med de andre (slg. det regulære ikosaeder).

Dette vilde da, som man ser, føre til en hel del umuligheder hvoriblandt at hverken vinkelbegrebet eller arealbegrebet var størrelsesbegreber, at trianglets omkreds var større end sig selv o. s. v.

---

\*) Ovenstaaende bevis kan varieres en del. Det kommer blot an paa at faa frem, at der om  $k$  kongruente  $n$  kanter kan konstrueres en  $m$  kant, saaledes at  $m$  ikke voxer med  $k$ , hvorpaa den i begyndelsen af 7 fremførte sætning bringes til anvendelse. Om de i 4 fremkomne firkanter kan der saaledes til ex. konstrueres en ny firkant, hvorpaa et nyt bevis om vinkelsummen da kunde bygges.

9. Naar en  $n$  kant helt omslutter en anden  $n$  kant, da har den yderste den mindste vinkelsum.

Ved paa en passende maade at forbinde de to polygoners hjørner med hverandre, opstykker man mellemrummet mellem dem i  $2n$  triangler.

Betegnes nu summen af disse  $2n$  triangleres vinkler med  $4nR - k$  og summen af vinklerne i den ydre og den indre  $n$  kant respektive med  $2R(n - 2) - p$  og  $2R(n - 2) - q$ , da haves

$$2R(n - 2) - p + 4nR = 2R(n - 2) - q + 4nR - k$$

eller

$$p = q + k$$

altsaa

$$p > q$$

eller

$$2R(n - 2) - p < 2R(n - 2) - q.$$

10. Er vinkelsummen i et triangel mindre end to rette, da har den ingen anden nedre grændse end nul.

Var nemlig grændsen forskjellig fra nul og lig  $6k$ , da fik man til exempel, at vinkelen i et ligesidet triangel aldrig blev mindre end  $2k$ , hvilket igjen, som man let ser, førte til, at vinklerne ved grundlinien i et ligebenet triangel, hvor topvinkelen var  $\frac{4}{3}$  rette, stedse vilde være større end  $k$ , hvor lange end siderne blev.

Man tænke sig nu konstrueret et triangel, hvis ene vinkel var  $\frac{4}{3}$  rette og hvor den ene af de to andre var mindre end  $k$ .

Er længden af den side, der er fælles ben for de to nævnte vinkler lig  $m$ , da kan man følgelig i et ligebenet triangel, hvis to ligestore sider er  $m$ ,  $q$ , og hvis topvinkel er  $\frac{4}{3}$  rette paa en af disse sider lægge  $q$  triangler af ovennævnte slags ved siden af hinanden, der helt og holdent kommer til at ligge inde i vort store triangel, hvilket direkte kan indsees.

Drager man nu rette linier fra den anden af de to ligestore siders skjæringspunkt med grundlinien til vore

smaa trianglers hjørner, deles herved vort ligebenede triangel foruden i de  $q$  kongruente smaa triangler desuden i  $2q - 1$  til.

Betegner man nu summen af vinklerne i disse triangler med  $2R(2q - 1) - v$  og summen af vinklerne i hver af de kongruente med  $2R - s$ , og endelig summen af vinklerne i det ligebenede triangel med  $2R - u$ , da faar vi:

$$2R - u + 4(q - 1)R + 2R + (q - 1)2R = q(2R - s) + 2R(2q - 1) - v$$

eller 
$$-u = -qs - v$$

hvoraf 
$$s < \frac{u}{q}$$

Da nu her  $u$  stedse maa være mindre end to rette, medens  $q$  kan voxe over alle grændser, saa indsees at den antagelse at  $k$  er forskjellig fra nul netop fører til, at  $s$  maa være nul, og hermed er satsen bevist.

11. Som bekjendt kan man uden parallelaxiomets hjælp bevise den sætning, at i et triangel en større side har en større modstaaende vinkel end en mindre side og omvendt.

Heraf flyder nu med lethed følgende sætninger, der vil komme til anvendelse i det efterfølgende:

En linie, der staar lodret paa to andre repræsenterer den korteste afstand, som kan tænkes mellem to punkter paa disse linier.

Naar man fra et punkt paa den ene af to paa en tredie lodrette linier nedfælder en perpendicularer paa den anden, saa bliver denne perpendicularer desto større, jo længere dens fodpunkt er fjernet fra den paa de to linier lodrette linie.

Naar i to retvinklede triangler en af de spidse vinkler er parvis lige store i begge, da er alle siderne størst i det triangel, hvor den omtalte vinkel har den største modstaaende side.

12. Naar en ret linie af et triangels to sider afskjærer stykker, der regnet fra de to siders skjæringspunkt

parvis forholder sig til disse som  $m$  til  $n$ , da er naar  $m < n$ , det afskaarne stykke af denne transversal mindre end  $\frac{m}{n}$  af den tredie side.

Forholdet være rationalt. Lad endvidere  $m$  og  $n$  representere de mindste hele tal, der udtrykker dette forhold mellem de afskaarne stykker og de to sider.

Disse deles derpaa i  $n$  ligestore dele, hvorpaa man trækker forbindelseslinierne mellem to og to af de sammenhørende  $n - 1$  delingspunkter.

De stykker, som de to sider afskjærer af disse transversaler, være efter deres orden:

$$S_1 S_2 S_3 \dots, S_n$$

hvor  $S_n$  er den tredie side.

Man drage perpendicularer fra endepunkterne af  $S_{p+1}$  og  $S_{p-1}$  ned paa  $S_p$ .

Paa grund af de fremkomne kongruente triangler har man nu, at endepunkterne af  $S_p$  halverer de stykker af samme, der afskjæres ved de to par perpendicularer.

Disse stykker være  $2x$  og  $2u$ .

Paa vor figur optræder nu to firkanter, hver med et par hosliggende rette vinkler.

Vi har altsaa, idet vi erindrer den anden af de just opstillede sætninger, at:

$$S_{p+1} > S_p \pm x \pm u$$

$$S_p < S_{p-1} \pm x \pm u$$

De dobbelte tegn, der stemmer overens i begge ligninger, kommer af den forskjellige maade, hvorpaa perpendicularerne kunne falde.

Vi faar altsaa:

$$S_{p+1} > 2S_p - S_{p-1}$$

Ved gjentagende anvendelse af denne sats erholdes:

$$S_n > 2S_{n-1} - S_{n-2}$$

$$S_n > 3S_{n-2} - 2S_{n-3}$$

$$S_n > 4S_{n-3} - 3S_{n-4}$$

.....

$$S_n > (n+1-m) S_m - (n-m) S_{m-1}$$

.....

$$S_n > n S_1 - (n-1) S_0$$

Denne sidste ligning kan imidlertid, da  $S_0 = 0$  skrives

$$S_1 < \frac{S_n}{n}$$

Endvidere faaes:

$$S_n > (n-1) S_2 - (n-2) S_1 > (n-1) S_2 - \frac{(n-2)}{n} S_n$$

$$S_n > (n-2) S_3 - (n-3) S_2 > (n-2) S_3 - \frac{(n-3)^2}{n} S_n$$

$$S_n > (n-3) S_4 - (n-4) S_3 > (n-3) S_4 - \frac{(n-4)^3}{n} S_n$$

Og i almindelighed:

$$S_n > (n+1-m) S_m - \frac{(n-m)(m-1)}{n} S_n$$

Heraf erhoides da vor sats:

$$S_m < \frac{m}{n} S_n.$$

Vi vil derpaa behandle det tilfælde, at forholdet mellem siderne og de afskaarne stykker er inkommensurabelt.

Man overskjærer de to sider  $u$  og  $v$  med rette linier, der deler dem i  $p$  ligestore dele.

Herved kommer  $S_m$  til at falde mellem delingsstregene  $S_q$  og  $S_{q+1}$ , og man faar:

$$S_q < \frac{q}{p} S_n < \frac{m}{n} S_n$$

Var nu:  $S_m < S_q$ , da var vor sats bevist; i modsat fald har man:

$$S_m - S_q < \frac{u+v}{p} \quad \text{eller}$$

$$S_m < \frac{u+v}{p} + \frac{m}{n} S_n$$

Da nu  $p$  kan voxe over alle grændser, saa ser man, at vor formel ogsaa i dette tilfælde er rigtig.

Var nemlig  $S_m > \frac{m}{n} S_n$ , saa kunde man sætte:

$S_m - \frac{m}{n} S_n = k$ , hvor  $k$  er en positiv størrelse.

Men nu er:

$$S_m - \frac{m}{n} S_n < \frac{u+v}{p}$$

altsaa er:

$$k < \frac{u+v}{p} \quad \text{eller}$$

$$p < \frac{u+v}{k}$$

Og da  $p$  kan voxe over alle grændser, saa ser man heraf, at  $k$  maa være nul eller negativ.

13. Naar en side i et triangel bliver delt i et antal ligestore dele ved en række overskjæringslinier, der danner den samme vinkel med denne side, som den tredie side, da er stykkerne af disse transversaler, der afskjæres ved to af siderne paa samme maade som i den foregaaende sætning en mindre del af den tredie side, end man efter den Euklidiske geometri kunde vente.

Som før være  $S_{p+1}$ ,  $S_p$  og  $S_{p-1}$  tre paa hinanden følgende overskjæringslinier, hvis skjæringspunkter med de to sider henholdsvis kan kaldes:

$$a_{p-1}, a_p, a_{p+1} \text{ og } b_{p-1}, b_p, b_{p+1}$$

Idet nu ifølge betingelsen:  $a_{p-1} a_p = a_p a_{p+1}$ , kan man gjennem midtpunkterne af disse trække to linier, hvoraf den ene staar lodret paa  $S_{p-1}$  og  $S_p$  og den anden lodret paa  $S_p$  og  $S_{p+1}$ , hvilke perpendikulærer  $P$  og  $Q$  paa grund af de fremkomne kongruente triangler maa være lige store.

Fra  $b_{p-1}$  og  $b_{p+1}$  nedfældes derpaa perpendikulærerne  $p$  og  $q$  ned paa  $Sp$ .



Fodpunkternes afstande fra  $b_p$  være  $x$  og  $u$ .

For at undgaa en noget vidløftig discussion om de forskjellige maader, hvorpaa vore perpendicularer kunne falde og dettes indflydelse, antager vi for simpelhedens skyld, at ingen af de ved transversalerne afskaarne triangler kan have andre stumpe vinkler, end den, der dannes af de to overskaarne sider i det oprindelige triangel.

Er denne ikke spids, da maa alle de andre vinkler i trianglerne være det; og det er dette tilfælde, der væsentlig har interesse for os.

Af de i 11. anførte sætninger følger nu at:

$$p < q$$

Thi som man let ser, er afstanden mellem  $p$ 's fodpunkt og  $P$  mindre end afstanden mellem  $q$ 's fodpunkt og  $Q$ .

Videre faar man heraf igjen:

$$b_{p-1} b_p < b_p b_{p+1}$$

og 
$$x < u$$

Af denne sidste ligning faar man saa, idet  $2r$  er det stykke, som  $P$  og  $Q$  afskjærer af  $S_p$  at:

$$S_{p-1} + r > S_p - r - x$$

$$S_p + r + u < S_{p+1} - r$$

Og heraf erholdes da:

$$S_{p+1} > 2S_p - S_{p-1}$$

hvilken formel, som vi før har seet, leder til vor sats

$$S_m < \frac{m}{n} S_n$$

Paa lignende maade som en gang tidligere kunne vi saa bevise, at sætningen fremdeles gjælder, selv om ikke forholdet  $\frac{m}{n}$  var rationalt.

14. Ved hjælp af ovenstaaende vil vi nu udlede det theorem, der svarer til den Pythagoræiske sætning i den Euklidiske geometri og som kan gives følgende udtale.

Hypotenusens kvadrat i et retvinklet triangel er stedse større end summen af katheternes kvadrater.

Trianglet være  $pqr$ , hvor  $q$  er den rette vinkel.

Man drage perpendicularen  $qu$  ned paa hypotenusen.  $u$  være perpendicularens fodpunkt.

Trianglet  $qup$  anbringes nu saaledes, at  $u$  falder paa  $q$  og  $up$  og  $uq$  langs efter siderne  $qp$  og  $qr$ .

Men da

$$\angle qpr = \angle qpu$$

har man følgende:

$$pq < \frac{pu}{pq} \cdot pr$$

eller

$$pq^2 < pu \cdot pr$$

Paa samme maade vilde man faa, om man istedetfor trianglet  $qup$  havde taget trianglet  $qur$ , at

$$rq^2 < ru \cdot pr$$

Ved addition af disse to formler erhoides da vor sats:

$$pr^2 > rq^2 + pq^2 .$$

Her i denne sætning har vi et mægtigt middel til at udlede theoremer om uligheder i den absolute geometri, ligesom den Pythagoræiske sætning leverte os alle de i den Euklidiske geometri forekommende ligheder.

Vi vil til eksempel bevise, at i et retvinklet triangel er kvadratet af høiden paa hypotenusen mindre end produktet af de to dele, hvori den deler denne.

Katheterne være  $p$  og  $q$  samt hypotenusen  $r$ , høiden være  $k$  og de to dele, hvori den deler hypotenusen henholdsvis  $x$  og  $u$ .

Man har da:

$$p^2 > x^2 + k^2$$

$$q^2 > u^2 + k^2$$

$$r^2 = x^2 + 2xu + u^2 > p^2 + q^2 > x^2 + u^2 + 2k^2$$

og heraf:

$$k^2 < xu.$$

15. Vi vender derpaa tilbage til den foregaaende sætningens figur, der bestod i et triangel, hvis ene side ved en række transversaler blev overskaaret i et antal ligestore dele, og saaledes at de dannede vinkler blev ligestore.

De omtalte overskjæringspunkter være efter sin orden:

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots$$

medens de punkter, hvori triangelts anden side bliver skaa-ret af de samme transversaler, være:

$$u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots$$

Er  $q$  de to siders skjæringspunkt, har man altsaa:

$$qx_1 = x_1 \ x_2 = x_2 \ x_3 = \dots$$

og før har vi bevist, at:

$$qu_1 < u_1 \ u_2 < u_2 \ u_3 < \dots$$

Er nu  $m < n$ , saa faas

$$qu_n > (n - m) u_m \ u_{m+1} + qu_m$$

$$qu_m < m u_m \ u_{m+1}$$

og heraf:

$$\frac{qu_m}{qu_n} < \frac{m}{n}$$

til hvilken formel, den Euklidiske geometri har en tilsvarende ligning.

16. Naar en bevægelig ret linie overskjærer to faste, saaledes at de afskaarne stykker af disse har et konstant forhold, da vil begge de to vinkler, som den bevægelige side i det dannede triangel danner med de to faste, hver for sig blive mindre og mindre, eftersom de afskaarne stykker voxer.

At summen af de to vinkler bliver mindre og mindre følger umiddelbart deraf, at et triangel, som omslutter et andet, har en mindre vinkelsum end dette.

De faste linier skjære hinanden i  $q$ . Man vælge to stillinger  $x_1 \ u_1$  og  $x_2 \ u_2$  for den bevægelige; hvor  $x_1 \ u_1$  være den inderste.

I følge betingelsen har man da

$$\frac{qx_1}{qu_1} = \frac{qx_2}{qu_2}$$

eller

$$\frac{qx_1}{qx_2} = \frac{qu_1}{qu_2}$$

Var nu til eksempel

$$\angle qx_1 u_1 < \angle qx_2 u_2$$

da kunde man drage en linie  $x_1 p$ , saa at  $\angle qx_1 p = \angle qx_2 u_2$  og hvor  $p$  var dens skjæringspunkt med  $qu_2$ , hvilket punkt faldt mellem  $u_1$  og  $u_2$ .

Men isaafald fik man

$$\frac{qx_1}{qx_2} < \frac{qp}{qu_2}$$

hvilket strider mod den just udviklede sætning, ifølge hvilken man har:

$$\frac{qx_1}{qx_2} > \frac{qp}{qu_2}$$

17. Den Euklidiske geometri gjælder uafhængig af parallelaxiomet for figurer med uendelig smaa dimensioner.

Vi vil først bevise nogle hjælpesætninger.

Naar en række rette linier deler en af de spidse vinkler i et retvinklet triangel i ligestore dele, da bliver den modstaaende kathet derved delt i stykker, der er desto større, jo længere de er fjernet fra den rette vinkels toppunkt.

Trianglet være  $pqr$ , hvor  $q$  er den rette vinkel og  $p$  den omtalte spidse.

Tager man nu to til et par sammenstødende stykker  $sv$  og  $vk$  af den delte kathet hørende triangler og lægger dem saaledes paa hinanden, at  $pv$  fremdeles bliver fællesside og  $ps$  falder paa  $pk$  og indtager stillingen  $ps'$ , da har man, naar

$$qs < qk$$

at:  $\angle qsp > \angle qvp > \angle qkp$

eller  $\angle vs'k > \angle vks'$

og altsaa er

$$vk > vs$$

Heraf sees paa samme vis som engang før, at forholdet mellem to fra  $q$  regnede stykker  $qa$  og  $qb$  er mindre end forholdet mellem de tilsvarende vinkler  $qpa$  og  $qpb$ , naar blot dette forhold er mindre end en.

Naar to retvinklede triangler har samme hypotenuse og de spidse vinkler er parvis lige store paa uendelig smaa vinkler nær, da er katheterne ogsaa parvis ligestore paa uendelig smaa størrelser nær.

Trianglerne lægges saaledes paa hinanden, at de sammenhørende endepunkter af hypotenerne falder sammen og de rette vinklers toppunkter paa samme side af den fælles hypotenuse.

Trianglerne i denne stilling være  $prq$  og  $prq'$  og hvor til exempel  $q'$  ikke kan falde inde i triangleret  $pqr$ . Katheterne, der skjærer hinanden i et punkt  $x$  være  $pq'$  og  $rq$ . Man har da ifølge betingelsen, at vinklerne  $q'pq$  og  $q'rq$  er uendelig mindre end vinklerne  $qpr$  og  $qrp$ ; og altsaa er  $xq$  og  $xq'$  uendelig gange mindre end  $qr$  og  $q'p$ .

Men heraf følger da umiddelbart, naar linien  $qq'$  trækkes, vor opstillede sætning.

Vi paastaar nu, at den i 12 udtalte sætning mere og mere nærmer sig mod den Euklidiske jo mindre og mindre siderne bliver; eller jo mere vinkelsummen nærmer sig mod to rette.

Er saaledes vinkelsummens forskjel fra to rette uendelig gange mindre end den mindste vinkel i triangleret, da haves, naar den gamle betegnelse paa overskjæringslinierne bibeholdes og man ved  $x_p$  og  $u_p$  forstaar de stykker af

$S_p$ , som afskjæres ved perpendicularærerne fra endepunkterne af  $S_{p-1}$  ned paa  $S_p$ , at differentsen mellem hvilket som helst to af stykkerne  $x$  eller  $u$  stedse er uendelig gange mindre end den mindste af dem.

De fremkomne retvinklede triangler tilfredsstillir nemlig, som man let ser, de i den ene af vore hjælpesætninger, satte betingelser.

Vi faar følgende

$$x_p + u_p = S_1 + E_p,$$

hvor  $E_p$  er en uendelig liden størrelse og altsaa har man:

$$S_n < S_{n-1} + S_1 + E_n$$

$$S_{n-1} < S_{n-2} + S_1 + E_{n-1}$$

.....

$$S_2 < S_1 + S_1 + E_2$$

eller

$$S_n < nS_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$$

Men nu er

$$S_n > nS_1$$

og altsaa ser vi, idet  $E_2 + E_3 + \dots + E_n$  jo maa være mindre end en uendelig liden del af en af trianglets to delte sider, at

$$S_n = nS_1 + E,$$

hvor  $E$  er en uendelig liden størrelse.

Heraf følger, at  $\frac{S_m}{S_n}$  kun adskiller sig fra  $\frac{m}{n}$  med en uendelig liden størrelse.

Da nu alle sætninger i den Euklidiske geometri i exakt form er opbygget paa denne sætning, saa har vi herved bevist, at denne geometri gjælder i det uendelig lilles verden.

18. Planets og rummets opstykning i regulære polygoner og polyedre.

Vi har før seet, at vinkelsummen i et triangel kan variere fra nul til  $2R$  og heraf følger da ligeledes, at en

regulær polygons polygonvinkel kan variere fra nul til  $2R \left( \frac{n-2}{n} \right)$ , hvor  $n$  er sidetallet.

Der eksisterer følgelig en regulær  $n$  kant, hvis polygonvinkel er lig:

$$\frac{4R}{p},$$

naar blot:

$$p > \frac{2n}{n-2}$$

Men da kan, som det let sees, planet opstykkès i det uendelige i saadanne  $n$  kanter, hvoraf der kommer til at ligge  $p$  om hvert hjørne.

Man indser, at planet fremdeles kan opstykkès ved at anvende forskellige regulære polygoner og saaledes at den samme gruppe ligger om hvert hjørne.

Paa lignende maade kan vi ogsaa faa rummet delt i regulære legemer; men her er omraadet langt mere indsnævret.

Som bekjendt kan man ved blotte kongruentsebetragtninger bevise, at to hinanden skjærende planer har en bøjningsvinkel, der er uafhængig af toppunktets beliggenhed.

Paa basis heraf faaes nu, at vinkelen mellem to sammenstødende sideflader til eksempel i et regulært hexaeder kan variere fra  $R$ , naar det er uendelig lidet, til  $\frac{2}{3}R$ , naar hexaedrets sidekanter bliver uendelig store.

I det sidste tilfælde har man nemlig, at kvadraternes vinkler er uendelig smaa og følgelig maa, idet man af et hjørne tænker sig udskaaret et uendelig lidet tetraeder, de omtalte bøjningsvinkler være uendelig lidet forskjellig fra  $\frac{2}{3}R$ , eftersom den Euklidiske geometri her nærmer sig til at gjælde.

Der maa altsaa eksistere et hexaeder, hvor bøjningsvinkelen mellem to sammenstødende sideflader er  $\frac{4}{5}R$ .

Rummet lader sig derfor i det uendelige opstykke i

saadanne hexaædre og saaledes, at der lægger sig 5 om hver sidekant eller 20 om hvert hjørne.

Ved at anstille de samme betragtninger over de øvrige regulære legemer, viser det sig at rummet paa hele to forskellige maader kan opstykses i lutter dodekaædre og kun paa en maade i ikosaædre.

Tetraædret og oktaædret derimod vil ikke give anledning til nogen saadan opdeling af rummet.

Af disse eiendommelige konsekvenser af parallelaxiomet's feilagtighed flyder nu mange mærkelige forhold i den absolute geometri, hvilke jeg ved en senere leilighed skal fremstille.

Mekaniken stiller sig ogsaa i et mærkeligt lys ligeover for disse ting.

Det fundamentale princip om kræfternes parallelogram eksisterer her ikke længer. Begrebet retning faar ikke sin sædvanlige betydning osv.

Et spørgsmaal kunde det da være, hvorledes mekanikens aksiomer blev at udtale, for at man til exempel deraf ogsaa skulle kunne bevise kraftens uforgjængelighed eller umuligheden af et perpetuum mobile.

19. At vinkelsummen i et triangel var mindre end to rette, fremgik, som vi saa, blandt andet af den antagelse, at den rette linie var af ubegrændset længde.

Paa kuglen derimod, hvor en storcirkel er af endelig længde, overbeviser man sig let om, at vinkelsummen er større end to rette.

Men heraf følger, eftersom kongruentseaxiomet og kontinuitetsprincippet ligegodt gjælder om sfæriske som om plane triangler, at de paa sætningen om disses vinkelsum, udledede uligheder fremdeles ogsaa maa finde sted paa kuglen, naar blot ulighedstegnet vendes.

Endvidere ser man af samme grund, at alle de sætninger, der udtrykke en lighed i planet fremdeles maa



gjælde paa kuglen, hvis deres bevis blot er baseret paa kongruentsebetragtninger.

Heraf indser man da igjen, som bekjendt, at parallel-axiomet ikke kan udledes af bare saadanne betragtninger.

Man mærke sig imidlertid, at dette kun er strengt bevist, naar kongruentseaxiomet blir anvendt i det to dimensionale rum.

Har man saaledes bevist en plan sætning ved hjælp af kongruentse- eller symetribetragtninger i rummet, saaa tør deraf ikke strax sluttes, at den samme sætning kunde beholdes ved lignende betragtninger i planet, eller hvad der bliver det samme, at sætningen ogsaa gjælder paa kuglen.

Hvis saa var, existerte der altsaa en mærkelig dualitet mellem plane og sfæriske figurer.

Det fortjener maaske her til belysning af ovenstaaende at bemærkes, at visse sætninger, der ved plane operationer er meget vanskelige at erholde, ved simple rumbetragtninger næsten blir selvindlysende sandheder.

Det er da især sætninger af descriptiv og projektiv natur dette gjælder, og beviset føres kun gennem kongruentsebetragtninger\*).

Lad os til eksempel føre et absolut bevis for at medianerne i et triangel skjærer hverandre i et punkt.

Vi har seet, at perpendiculareren paa midten af en side i et triangel ogsaa staar lodret paa linien gennem de to andre siders midtpunkter\*\*).

Heraf i forbindelse med den absolut beviste sætning, at to linier, der staar lodrette paa et plan, selv ligger i

\*) Et eksempel derpaa har jeg vist i «Tids. f. Math.», 1884, pag. 181.

\*\*\*) Af denne sætning følger ogsaa, kan man mærke sig, at høiderne i et triangel, hvis hjørner halverer et andets sider, skjære hverandre i et punkt, dersom dette ydre triangel kan indskrives i en cirkel.

et saadant, faaes nu, at to linier, der forbinder midtpunkterne af to par modstaaende sider i et tetraeder maa skjære hinanden.

Forbindelseslinierne mellem de tre par modstaaende sider i vort tetraeder maa følgelig, siden dette ikke er nogen plan figur, gaa gennem et punkt.

Denne sætning kunde man da ved en kontinuitets betragtning bevise ogsaa at gjælde i planet. Vi vil imidlertid gaa en anden vei.

Et triangels hjørner  $p$ ,  $q$ ,  $r$  være forbundne med et fjerde punkt  $s$  i planet. Gjennem  $s$  opreises en perpendikular  $sv$  paa dette, hvorpaa  $vq$ ,  $vp$  og  $vr$  drages.

Linierne mellem disses midtpunkter og midtpunkterne for  $sq$ ,  $sp$  og  $sr$  staar nu lodrette paa planet gennem midtpunktet af  $sv$ , der staar lodret paa samme. Altsaa maa planerne mellem disse midtpunktslinier og midtpunkterne af triangelts sider skjærer hverandre i en ret linie, eftersom de alle tre gaar gennem et punkt, det ovenfor omtalte punkt i vort tetraeder, og desuden staar lodret paa vort plan gennem midtpunktet af  $sv$ .

Men heraf fremgaar da umiddelbart vor plane sætning.

Ved saa at lade  $s$  være to medianers skjæringspunkt faaes altsaa af ovenstaaende, at alle tre medianer maa gaa gennem dette punkt.

Lad os give nok et eksempel.

Fælleskoorderne for tre cirkler vil, hvis der overhovedet finder skjæring sted, gaa gennem et punkt.

Tre kugler gennem disse cirkler skjærer hverandre nemlig blot i to punkter, og følgelig gaar de tre planer gennem kuglernes skjæringscirkler gennem samme rette linie. Men herved er jo vor sats bevist.

20. Naar der i den Euklidiske geometri forekommer en sætning, der udtaler en lighed, saa er det ikke dermed

sagt, at den tilsvarende i den absolute geometri, naar den ikke er dermed identisk, netop skulde udtrykke en bestemt ulighed.

Det kan hænde, at ulighedstegnet vendes, naar de i sætningen optrædende variable faar bestemte værdier.

Hvis saa er, gives der altid en stilling af figurens elementer for hvilken, der indtræder den ved parallelaxiomet udledede lighed.

I den Euklidiske geometri læres der saaledes, at en periferivinkel er halvdelen af en centralvinkel paa samme bue.

Dette finder ogsaa sted absolut, naar blot de to vinklers toppunkter har samme afstand fra den rette linie der halverer centralvinkelens ben.

Ligger periferivinkelens toppunkt anderledes, kan den efter omstændighederne være større eller mindre end halvdelen af den tilsvarende centralvinkel.

Vor sætning følger umiddelbart af at vinklerne ved grundlinien i et ligebenet triangel er ligestore samt af at de ved central og periferivinkelen bestemte triangler har den samme vinkelsum.

Som tillæg til overstaaende kan vi meddele den sætning, hvis tilsvarende Euklidiske udtaler forbindelsen mellem vinkelen mellem to korder i en cirkel og de ved de afskaarne buer bestemte centralvinkler.

Sætningen finder nemlig absolut sted, naar vinkelen mellem korderne ombyttes med den centralvinkel, hvis ben staar lodrette paa disse.

Satsen følger direkte deraf, at en radius, der halverer en korde, ogsaa halverer den tilsvarende bue.

Man kan overhovedet mærke sig, at mange sætninger om vinkler i den sædvanlige geometri fremdeles vedbliver at gjælde i den absolute, naar blot vinklerne ombyttes med andre, hvis ben staar lodrette paa disses og hvis toppunkter tilfredsstiller visse betingelser.

21. I det foregaaende har vi gjort opmærksom paa, at visse sætninger, der til ex. udtalte, at tre rette linier gik gennem et punkt, med lethed lod sig udlede ved kongruentsebetragtninger i rummet. Herved er dog at mærke, at sætningen kun holder stik, forsaavidt der i det hele taget finder nogen skjæring sted.

Det kan nemlig hænde, at to rette linier slet ikke skjærer hinanden. Om to saadanne linier kan man da, som bekjendt bevise, at der gives en linie, som staar lodret paa dem begge.

Vi paastaar nu, at midtpunkterne af de tre dobbeltperpendikulærer til tre rette linier, der ikke skjærer hinanden, ligger paa ret linie, saafremt de to dobbeltperpendikulærer til en af disse tre linier gaar i modsatte retninger.

Satsen indsees ved, at man bemærker, at en ret linie gennem to af midtpunkterne skjærer de tre rette linier, samt ved at en ret linie gennem midtpunktet af to liniers dobbeltperpendikulærer danner de samme vinkler med disse.

Finder den opstillede betingelse ikke sted, indtræder det særsyn, at sætningen ophører at være rigtig; de tre midtpunkter kan nemlig da ikke ligge paa nogen ret linie.

---

## Om seter eller strandlinjer i store høider over havet.

Af

Cand. real. Andr. M. Hansen.

Diskussionen om, hvorledes de horisontale furer i fast fjeld og dermed homologe aflagringer af løse masser, som sammenfattes under benævnelsen strandlinjer, er opstået er endnu ikke nået til nogen tilfredsstillende afslutning. Teorierne stod fremdeles imod hverandre. De forekomster, som hidtil er beskrevne, ligger alle ud mod hav eller fjord og under det nivå, havet nåede under slutningen af istiden og ræsonnementet har været bundet herved. I sommer har jeg imidlertid iagttaget en udbredt optræden af ganske analoge horisontale afleiringer og furer i fast fjeld i høider fra 660—1090 m. i det centrale Norge. Dette moment forekommer mig at veie så meget i diskussionen, at jeg har fundet det rimeligt at indbringe det allerede nu, skjønt de iagttagelser, jeg kunde gjøre i den korte tid af 9 dage, som stod til min rådighed, naturligvis er meget mangelfulde. De »strandlinjer« jeg observerede ligger i Østerdalen, i strøget mellem Øvre Rendalen og Hanestad stasjon i syd og Tønset og Foldalen i Nord. I dette strøg blev jeg opmærksom på over et snes stykker, hvoraf jeg besøgte omtrent halvdelen. Østerdølerne kjender den meget godt og har et eget navn for dem, som jeg vil foreslå optat istedet for det sammensatte »strandlinje«, hvilken benævnelse desuden har bismag af en bestemt teori. De kalder den seta (med åben.

e, næsten som æ), sate eller såttå.\*) Skjønt formen med vokaltiljævning, såttå, er den almindeligste i Østerdalen, er det vel rimeligere at foretrække normalformen sete, som bedre føier sig til vort almindelige målføre.

Anledningen til at jeg blev bragt til at studere disse seter var, at jeg ifjor ved en bestigning af Høgrond opdagede en linje på det nordenfor liggende isolerede fjeld Kringla, der aldeles mindede mig om strandlinjerne ved Trondhjem, Osterfjorden og Romsdalsfjorden. Jeg undersøgte den siden næriere, men snestorm med sterkt barometerfald hindrede mig fra at få brugbare målinger. Ved nærmere at overveie sagen erindrede jeg at have hørt omtale, at en strandlinje også skulde være iagttaget i Tønset af cand. min. P. Mortenson og fandt den også omtalt af A. Blytt (Forh. Chr. Vidensk.-Selsk. 1881. Nr. 4). Da jeg i år vilde optage undersøgelsen, reiste jeg derfor først op til Tønset. Fra jernbanestationen sees en tydelig stribe i skoven i NO., hvilken jeg så ledte op på stedet. På opturen kom jeg over den (eller søndenfor dens ende?) op mod Holsæteren uden at bemærke den og fandt den først længere nordpå mod Bjørgesæteren. På seten traf jeg to tømmerhuggere, hos hvem jeg fik besked både om det østerdalske navn, og om at slige seter fandtes hele dalen opover i begge lier, i Tyldalen, i Rendalen o. s. v., hvorved jeg straks fik et begreb om fænomenets almindelighed. En sete såes ogsaa ganske rigtig i tilsyneladende samme høide i lien tversover ved Helsingengen — og siden en mere tvilsom på vestsiden af Tunna. På turen sydover såes en fortsættelse af denne sidste ved Storsvang over Få-dalen. I Veslelvdalen (Lilleelvdalen) opdagedes straks hele tre linjer, to over hinanden over Liengårdene ved den gamle

---

\*) If. Ivar Aasen: sete (e') m. 1) bagdel på legemet, podex, egentlig det man sidder på (Sv. säta). 2) en liden flade i en klippe eller på en bjergtop. Telem. (Nogle steder sate). I Gudbrandsd. seta (sæta).

Foldalsvei og en tredje i lavere nivå over Baugen. Alle disse besøgte og desuden iagttoges en lignende ovenfor Steingårdene og på Brandvoldstenen. Ifølge P. Mortenson, som har undersøgt Veslelvdalens seter meget nøie, findes der i virkeligheden hele tre over Liengårdene og to på Brandvoldstenen. — Under opturen gjennom Foldalen viste hr. Mortenson mig den velvillighed at følge mig op til en af ham opdaget kjæmpemæssig sete på Grubekletten i S. f. Rødalssæteren (der hvor amtskartet har Mælsølie sæter)\*).

Videre op Foldalen. — Op for Grimsbu såes en horisontal linje i Hånæskletten. I Foldalens kirkebygd besteg jeg en sete i lien N. f. Krokhaug. På Knutshøvd og Gåshøvd på sydsiden af dalen slutter engene oventil med en horisontal linje i en høide korresponderende med denne sete, uden at jeg dog på stedet kunde opdage nogen veiliggende dannelse. Fjeldsiderne var kanske her for bratte til nogen affeiring. På Holskollens nordside skimtedes et længere stykke en stribe mosklædt terræn, måske en sete, og en lignende såes senere på SV. siden. Den ifjor observerede høitliggende sete på Kringla og dens gjenbo på Stygfjeld besøgte så igjen, hvorpå tilbaketuren skede samme vei. — Fra Barkalden gik jeg over til Rendalen for at sammenligne høiden af seterne i de to nabodale, men her ved den lave overgang ved Jutulhugget fandt jeg ingen sete på nogen af siderne. Længere syd ved sammenstødet af Tysla og Undset-åen optrådte derimod overmåde smukke seter regelmæssig hugget i fast fjeld med lodret væg — på begge sider af dalen og på Fonåsfjeldet, som ligger mellem de omtalte små elve. Op

---

\*) Når jeg offentliggjør mine ufuldstændige iagttagelser i et emne, som hr. Mortensen begyndte at beskæftige sig med for flere år siden, er det efter forgjæves at have anmodet ham om at tage prioritet i beskrivelsen og fordi jeg ved diskussjon af forekomsten er bragt til at opstille en teori, der også streifer ind på andre felter.

mod Undset var der to over hinanden, hvoraf den ene kunde følges sydover til henimod Ellingsåen, N. f. Lomnæssjøen. Den korresponderende i den vestlige li håbede jeg forgjæves at finde ved veien over Hanestadkølen, men den var afbrudt her. Samme dag så jeg en sete på N. siden af Grøttingbratten og på Kletten S. f. Hanestad i Glommendalen.

Jeg har givet min rute i sammenhæng, for at man ved at følge den på amtskartet kan få et begreb om, hvor der vrimler af seter i dette strøg, når jeg, som fra først af var uvant til fænomenet, har kunnet notere så mange. En beskrivelse af hver enkelt af dem vilde blive for vidtløftig og bør i hvert fald ikke ske, før man har fulgt den enkelte sete såvidt mulig i hele dens udstrækning. De er desuden meget ensartet bygget. Som type på den almindeligste form kan tages f. ex. seten på Baugen i Vesleådalen.

Den egentlige sete (Fig. 1 B) dannes af en horisontal eller svagt skrånende flade på i alm. 10—20 m., der træder frem fra liens almindelige hældning, afgrænset på den øvre side af rygstødet (A), der ved de af løst materiale byggede seter i almindelighed ikke skiller sig stort ud fra dalsidens faldvinkel, men som ofte viser små knauser af det faste fjeld stikkende frem og da med lodret kant. Fra seten falder foden (C) brat af som en jevn flade med en faldvinkel på 20—38°, som dog ofte blir mindre. Navnene på de forskellige dele af seten har jeg som man ser valgt i overensstemmelse med ordets oprindelige betydning »det man sidder på«, og de synes mig også kortere, bekvemmere og mere malende end de af K. Petersen for strandlinjer foreslåede »indre og ydre stødtrin« og »trinflader«.

Således som her skildret optræde seterne i de almindelige bratte lier (10—20°). Hvor dalsiden blir fladere, viskes de ligesom ud, seten blir mere skrå og foden længere og fladere for tilsidst begge ganske at falde sammen med lien. — Nord for Krokhaug f. ex. begynder seten under Storhøvd



som en skrå afsats, samler sig længere mod vest til typisk form for igjen at viskes ud ved den brede, flade skråning hvor myrstrøget vest for Hånæskletten munder ud. Siden ser man en grøn, vidjeklædt stribe trække sig horisontalt bort mod det fjeld, på hvis modsatte side Foldalsgruben ligger, for her at optræde som en storstenet vold, der forsvinder i uren.

Materialet består i kvartsfjeldet i regelen af nødde- til næve-store kantrundede stene, som ved sin tørhed nærmest minder om grovt pimpstensgrus og oftest i setekanten og på foden kun gir rensdyrmosen sparsom næring og derfor stadig træder nøgen frem i dagen. I Trondhjemsskiferen og også i kvartsfjeldet på steder, hvor seten breder sig ud til større flader, er materialet finere. Særlig i yderkanten findes undertiden større blokke, som tildels synes ikke at høre stedets bergart til. — Hvilken form fjeldgrunden har under dette løse dække kan kun flere skjæringer oplyse sikkert om. Den måde hvorpå det faste fjeld ofte optræder som lodret rygstød med små knauser, og det at der ofte ligger et fugtigt strøg inderst ind mod rygstødet i seten, giver det indtryk, at et snit vilde blive omtrent som fig. 1 viser. — Der er en mærkbar forskjel i lien over og under den øverste sete. Ovenfor træder det faste fjeld oftere frem, nedenfor meget sjelden. Hr. Mortenson fortalte mig, at det dyrkbare jordsmon i dalsiden sjelden nåede op over seten, hvilket stemmer med forholdet ved Knutshøvd og Gåshøvd i Foldalen, som er omtalt tidligere.

I sit horisontale løb viser de almindelige seter i kilometervis ingen større variasjon i høide end betinget af rent lokale ujevnheder. På grund heraf i forbindelse med deres faste, jevne bund benyttes de næsten altid af stier, som således bliver et bekvemt hjælpemiddel, når man skal finde op en sete i skovlænde.

På enkelte steder træder seterne frem i en form, der dog

ikke er fuldt så udbredt efter mine iagttagelser hidtil — nemlig helt bygget i fast fjeld. Det smukkeste eksempel jeg har seet er de lange seter i Øvre Rendalens kirkebygd, hvor man øverst oppe i den bratte, urede li kan følge det lodrette ca. 5 m. høie rygstød med øinene omtrent 4 kilom. Seten selv er for størstedelen dækket af nedstyrtede stene. Min tid tillod mig desværre ikke nogen næiere undersøgelse i Rendalen.

På flere steder træder seterne i forbindelse med morænedannelser. Et eksempel herpå er den iøinefaldende sete lige over Hanestad stasjon. Da jeg imidlertid var oppe på denne en mørk aften kl 10—11, fik jeg ikke undersøgt den så nøiagtig som ønskeligt var. Såvidt jeg kunde overse den, begynder den længst ude som en afsats i den meget storstenede ur, træder mere og mere frem som en grovbygget sete med sit rygstød stykkersprængt i svære blokke for længere ind i kriken (mod NO) at få nogenlunde den typiske form, der så igjen udviskes i den fladt skrånende li. Om den fortsættes videre kunde jeg ikke observere. Nedenfor stryger nu en række morænerygge parallelt med Kivåen op mod seten og slutter sig til dens fod.

På en lignende måde optræder morænedannelser ved de to høiestliggende seter, jeg har undersøgt seten på Stygfjeld i Rondene (1090 m.) og Mortensons sete i Grubefjeld (948 m.) Ved sin høide over havet, ved sin størrelse, ved kombinasjon med morænedannelser og ved sin yderst eiendommelige symmetri i bygning synes disse seter så mærkelige, at jeg skal vedføie et skitseret kart over dem (fig 2 og 3).

Længden af Grubekletseten har jeg anslået til ca. 1,5 km., bredden op til ca. 90 m. (fig. 2), de tilsvarende mål på Stygfjeld (fig. 5) over 2 km. og ca. 40 m. På det bredeste strøg af Grubefjeldseten ligger en hel sætervang. Begge seter begynder nordenfra med at morænemasser (a) trækker sig op fra dalsiden i rygge, der skråer ind mod fjeldsidens

bratte ur, hvorpå seten optræder, hos begge følger en mere moræneagtig struktur i en stribe med store stene langs yderenden (b) tildels reisende sig som ryg, hvis yderside altså danner foden. Fra Grubekletseten ved e ser man således profilet fig. 4. — Begge ender med at lave holmer (c) af fast fjeld bliver almindelige i seten, hvorpå der følger høiere knauser, som er skilt fra fjeldets hovedmasse ved lodrette kløfter (d), der ligesom skjærer ud stykkerne. Rygstødet dannes hos begge, hvor ikke ur skjuler det, af lodrette vægge, hvis bergart let falder i kvadere (Rondekvarts med svagt nordlig fald i Stygfjeld, Trondhemsskifer med svagt vestlig fald i Grubefjeld). Bergartens forskellige natur medfører måske, at mens Grubekletten over seten viser viser sig meget stærkt isskuret, har kvartsiten ingen sådanne mærker, medens derimod også her de som holmer opstikkende skikhoveder i seten selv er afrundede. — Ved begge synes isbevægelsen at have gået nordover.

Et af de første spørgsmål, som påtrænger sig en ved synet af disse horisontale linjer, som så almindelig er spændt ud gennem dalerne, er — kan deres høide samles til et eller flere nivåer? Følgende liste giver de høider mine aneroidobservasjoner har givet. Listen omfatter af grunde, som senere skal udvikles, foruden seter også terrasser og enkelte skarhøider. — De af P. Mortenson meddelte høider er mærkede med en stjerne. Da disse som oftest er middeltal af flere observasjoner har jeg optaget dem som rigtige og sat mine målinger i parentes ved siden.

Skarhøiderne er efter veinivellements og amtskarter.

|                                  |                                         |
|----------------------------------|-----------------------------------------|
| Sete ved Stygfjeld<br>og Kringla | } 1090 m. Skar Jerkin-Kongsvold 1040 m. |
| Mo v. Stygfjeld                  |                                         |
| Mo v. Knutshøvd                  | 1086 m.                                 |
| Sete v. Grubekletten             | 950 m.                                  |
| — - Krokhaug                     | 948 m. — Foldal-Domås 951 m.            |
| Mo v. Meleimsbæk                 | 923 m.                                  |
|                                  | 821 m.                                  |

|                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| Mo ved Rensliasen              | 802 m.                              |
| — - mellem Grimsen og<br>Folla | 760 m.                              |
| Lavere om v. Knutshøvd         | 754 m.                              |
| Sete v. Lien (øverste)         | *755 m. (762)                       |
| — - Tønset (Bjørge-<br>sæter)  | 737 m.                              |
| — - Brandvoldsten<br>(øvre)    | *722 m. Skar Tønset-Tyldal 722 m.   |
| — - Lien (midtre)              | *721 m.                             |
| — - Hanestad                   | 671 m?                              |
| — - Brandvoldssten<br>(nedre)  | *662 m.                             |
| — - Baugen                     | *658 m. (666) — Røros-Tyvold 664 m. |
| — - Skamnæsberget              | *662 m.                             |
| — - Tyldalen                   | *666 m.                             |
| — - Rendalen                   | 660 m.?                             |
| — - Lien (nedre)               | *659 m.                             |
| — - Skardvola                  | *657 m.                             |
| Mo - Finbudalsryg              | *664 m.                             |
| — - Sivilla                    | *665 m.                             |
| — - Storbrækka                 | 660 m.                              |
| — - Einunda                    | 652 m.                              |

I de samme dalstrøg, hvori seterne findes, optræder et andet led i landskabet med mere iøinefaldende drag, som ligeledes leder tanken hen på en tidligere vandflade — det er terrasserne, de umådelige sandmoer med for øiet horisontale flader og bratte afslutninger i åben situation, som her i Foldalen, på Rondenes øst- og nordside, i Vesleådalen, Rendalen o. s. v. optræder i en usædvanlig udvikling. Man bliver bragt til en undersøgelse af deres høide i forbindelse med seterne, ved at »strandlinjerne« og »de marine trin« korresponderer. Gjælder det imidlertid om terrasserne i fjorddalene, at det er meget vanskeligt at bestemme deres høide, så gjælder det i endnu høiere grad ved de ofte stærkt skrå-

nende terrasser i høifjeldets daler, At måle deres høide ved fladens inderkant er vistnok det mest rasjonelle men på grund af udskylninger fra oventil liggende terræn o. s. v. det vanskeligste at udføre i marken. Terrasserne optræder ofte trappeformig, men med forskjellige trin på begge sider af dalen. De findes i vekslende størrelser fra ganske små trin til store egger og i snart sagt alle høider. Man må derfor vælge sig ud blot de mest fremtrædende til observationerne, de der har størst horisontal sammenhængende udbredelse og de øverste på hvert sted. De observationer jeg fik gjort i år er temmelig få. De viser dog ligesåvel som Mortensons en nøie sammenhæng mellem seter og terrasser. Ifølge Mortenson går de høie egge ved Sølva (Veslelvdalen) for øiet aldeles i et med seterne.

Den skråning moerne har synes tildels at være større end ved de marine trin, hvilket synes at stå i en sammenhæng med materialets grovhed. Følgende profil fulgtes fra Døråsæter i Rondane. Først en lang mo med jevnt fald 1060—1040 ved vandskillet mellem Stygfjeld og St. Kringla, så efter en afbrydelse ved morænelandskab fra næste vandskil 914—905—891 ned til Grimsa. Profilet ned til Grimsa fra 1040 m.'s vandskil viser sig seet fra det mellemliggende Kringla fuldstændig ensartet. Ved begge bliver materialet stadig finere udover mod dalen. Fra den høitliggende ryg vis å vis Døråsæteren (1140), der hæver sig 71 m. direkte fra elven i tilslutning til Langglupens moræner, ned til Grimsa aftager det fra nævestørrelse gennem den i seterne almindeligst æggestørrelser (ved vandskillet) til almindelig grov kvartssand ved Grimsa. Det hele gjør indtryk af at være ført ud af voldsomt flommende elve. — Først lige ved Grimsa falder den skrånende masse af i terrasser fra 891 til 877 til 836. Ved broen syd for Fallet komme videre en stor mo 810. Senere fortsættes tilsyneladende i sammenhæng 802—795, hvortil den store, svagt skrånende mo mellem Folla og

Grimsa slutter sig med fra 760 m. udover. Altså: 1140, 1060—1040, 914—891, 877, 836, 810—795, 760—? m. Dette profil viser tydelig, hvor sammenhængende terrassehøiderne kan optræde og hvor vanskelig det i hvertfald i længdeprofilerne på denne måde vil være at udpege nivåerne. Mærkes skal imidlertid, at østenfor den store mo ved åmotet optræder der korte men mægtige bastioner med stærke sprang i høiden, hvoraf den øverste synes at slutte sig til Foldalens setehøide på 922 m. (948?). Ved Rensliåsen videre i øst måltens lignende bastioner 802, 712, 698. — Det er til sådanne tverdalsmoer man vel bekvemmest holder sig for at sammenligne nivåerne. — Hvorvidt sprangene i terrassernes høide overalt direkte kan sættes i forbindelse med sprangene i seternes høide således som listens s. 235 viser den, kan vel først flere målinger vise. —

Når man vil forsøge på at udrede disse eiendommelige dannelsers tilblivelseshistorie, ser man sig kanske først om efter analoge forekomster, — efter strandlinjer og terrasser i åben situasjon i store høider over havet andetsteds. Opmærksomheden fæster sig da ved de berømte *Parallel Roads of Lochaber* i Skotland, ægte seter af løst material, hvorom de skotske og engelske geologer har ført diskussionen helt siden de første gang blev videnskabelig beskrevne af Mac Culloch 1817\*). Da disse dannelser er så fuldstændig analoge med de østerdalske, optræder i samme forhold til terrasserne og som vi vil se i mange andre punkter viser en så utvilsom lighed, at de nødvendigvis må have havt samme tilblivelseshistorie, skal jeg kortelig referere de vigtigste

\*) Mac Culloch *Trans. Geol. Soc.* V. 4, Dick Lauder *Trans. Roy. Soc. Edinb.* V. 9 1818, Ch. Darwin *Phil. Trans.* 1839, Agazzis *Edin. New. Phil. Journ.* V. 33 1842, Milne-Home do. V. 43 1847, G. S. Mackenzie do. V. 44 1848, James Thomson do. V. 45 1848, Jamieson *Journ. Geol. Soc.* V. 17 1863, Prestwich *Proc. Roy. Soc, Lond.* V. 29 1879 og fl.

af de fremsatte teorier. The Parallel Roads optræder i nogle dale, som ligger i vinkelen mellem The Grampians og Great Glen, det dalføre, hvorigjennem den caledoniske kanal er ført. Som kart I viser, findes der tre Roads i *Glen Roy*, hvoraf den nederste fortsættes i hoveddalen *Glen Spean*, med høiderne 347, 323 og 259 m. I nabodalen *Glen Gluoy* optræder en tydelig linje i høiden 356 m.

Deres udprægede horisontalitet henleder straks tanken på, at de må være afsatte under en vandflade. Den første teori var den også i Norge for dannelsen af indenlandsterasser fremsatte, de *lukkede kummer*, hvor dammene da kunde være fast fjeld eller løse masser og tænktes senere bortskaffet ved sprækkedannelse eller ved erosjon. — Egnens orografi nødvendigvis imidlertid for at kunne spærre sjøer i Glen Roy til de tre seter hele tre damme, ved udløbet i Glen Spean, ved Glen Glaster og ved Gaet Glen. For at dæmme til sete III måtte dammen ved Glen Glaster sprænges, og videre ved nivå IV dammen ved mundingen og så den umådelige dam i Glen Spean, — en række usandsynlig tildragelser, der tilsammen gjorde teorien om disse damme, hvoraf man intet spor så, til en ren urimelighed.

Overført på terasser og seter i Østerdalen vilde urimelighed blive så meget større, som den orografiske bygning her er endnu meget mere indviklet. For en sete på 1090 m. vilde man tilslut måtte bygge op dammer næsten helt rundt den imaginære sjø, da omgivelserne ikke kan bidrage stort til at danne væggen.

Teorien om dammer af fast materiale er derfor også forladt i England.

Den næste teori, som fremsattes af Darwin, undgik alle disse vanskeligheder med dammerne ved at tilskrive selve havet dannelsen af »strandlinjer«, hvis tilblivelse altså var at henføre til havets nivå undre en suksessiv hævning af landet. Men usandsynligheden ved en hævning på over 300 m.

uden nogen forskyvning af horisontalerne, mangelen af marine spor, nivåernes forskjel i nabodale, den rent enestående optræden i trange høifjeldsdale er bleven anført som modbeviser. Der tages heller intet hensyn til den betydningsfulde omstændighed, at skarene I—IV i høide falder nær sammen med the Roads og viser elvefar efter sjøernes gamle afløb østover. Endvidere gjælder også her den indvending, som kan fremføres mod teorien om en marin dannelse af de tilsvarende forekomster i Norge i høider op til 1000 m. Den isbræ, som bragte det materiale, hvori den glaciøse littoral-fauna i de høieste skjælbanker levede, over »Mjøsens afgrund«, må have haft en mægtighed af mindst 500 m. Netop her i Nærheden, på Rendalssølen og på Tronfjeld, sees spor af isens virksomhed op til 1725 m. og 1600 m. (Tørnebohm Förh. Sv. geol. Förening. B. 1, Helland do. B. 2) At bræer af sådan tykkelse og størrelse skulde have bevaret uskadt under hele hævnngen fra  $\div$  1000 m. til  $\div$  200 så overfladiske, lette dannelser som seterne er umuligt. Man kan have så små tanker man vil om isens eroderende evne, man kan dog ikke tænke sig, at disse skulde kunne beholdt sin regelmæssige, jevne bygning i kilometerlange løb. Og over seterne sees stadig isskuring, hvilket også gjælder i Lochaber.

Agazzis gav så stødet til den forklaring af the Parallel Roads, som i næiere detail er udført af James Thomson og Jamieson. Efter denne sidste skulde det være lokale tverbræer, der skal have dannet dammerne. Hvis man tænker sig to isstrømme, en i den store caledoniske dal (Great Glen) fra Loch Arkaig og en i Glen Treig, kan problemet løses, og de forskellige nivåer forklares ved en gradvis formindskelse af disse, hvorved efterhånden udløbet gennem de forskellige skar blev frit. — Vanskeligheden består imidlertid i at vise, hvorledes selv mægtige tverbræer kan dæmme inde lange sjøer med en dybde



af 150—220 m. til et nøiagtig bestemt nivå i så lang tid, som behøvedes til dannelsen af en »strandlinje.« Bræenderne pleier altid at være fulde af sprækker, og der indsees ingen grund for dem til at vælte sig så høit som førudsat op mod den modstående dalside, når veien udad til siden, ud i sjørne står åben. Desuden indsees ikke hvorfor Glen Roy og Glen Gluoy skulde være fri for isbræer, når nabodalene nærrede så mægtige.

Disse vanskeligheder, som Jamieson selv tildels antyder, bringer Prestwich over til den forklaring, at de sammenstødende bræer fra samtlige dale har dæmmet inde sjøer her i det indviklede terræn. Når disse sprængte de is og detritus-masser, som spærrede dem inde, tømtes sjørne med stor voldsomhed indtil de nåede et nivå bestemt ved skarene mod øst. Det uddrag af hans teori, som indeholdes i Proc., er lidt uklar; men såvidt jeg kan forstå, tænktes da seterne dannet ved udglidninger af det vandfyldte terræn til sjøens flade. — Denne teori har dog ingen plads for dannelsen af seter i fast fjeld, som dog efter sin hele optræden fordrer de samme hovedbetingelser. Den temmelig fuldkomne horisontalitet i the Parallel Roads stemmer heller ikke godt med den, da vel udglidningen ikke vilde været så jevn.

Såvidt jeg kan se må forholdene i Lochaber under landisens afsmeltning have været således, at en dannelse af opdæmmede sjøer lader sig forklare på en mere forståelig måde. I vinkelen mellem Skotlands sværeste fjeldmasser, som fra Ben Nevis fortsætter mod øst og (på NV. siden af Great Glen) mod nord må der have været alle betingelser tilstede for en vældig brædannelse under istiden. Isskuring og erratiske blokke er også fundne til en høide af over 500 m. The Great Glen var fyldt med en mægtig bræ med bevægelse mod NO, og idethele har bevægelsen spredt sig vifteformig ud fra vin-

kelens toppunkt ved Fort William.\*) I de dale, hvor Parallel Roads findes, repræsenterer dette en bevægelse opad, mod vasdragets løb. Fra alle skar går nu for tiden elve til begge kanter, som tilsammen har udgjort bræens gamle leie. Når nu isdækkets afsmeltning var nået under skarets høide i en dal, måtte der nødvendigvis stænges inde et vand, dannet af nedbøret på selve stedet, af overfladevand fra bræen og af det vand, der altid siver ud af bræens ender. Først stemmedes en sjø op i Glen Gluoy, hvis skar mod O er høiest. Siden dannedes der en sjø i Glen Roy i nivå med Loch Spey (II på kartet), som når bræen ikke mere fyldte eller stængte Glen Glaster fik afløb herigjennem og dermed faldt til nivå III. Endelig, da afsmeltningen var nået såvidt, at Glen Roy næsten var bræfri, havde bræen ogsaa lidt efter lidt trukket sig ud af Glen Spey henimod indlandsisens sidste rest inderst i krikaen ved Ben Nevis, så den store tvegaflede indsjø med nivå IV kun ved denne sidste bræmasse var spærret fra det nuværende udløb vestover.

Efter denne teori fordres kun den gradvise afsmeltning af en og samme hovedmasse af indlandsisen i vinkelen mellem Skotlands høieste fjelde for at forklare dannelsen af de sjøer, hvori the Parallel Roads er dannet, tilligemed deres udstrækning og høide.

At indlandsisens hovedmasse, støttet bagtil mod høie fjelde, og sendende bræer op gennem dalene selv med bevægelse ret op mod de opstemmede sjøer vil kunne danne en solid dam synes meget rimeligt. At sjøens nivå kan holde sig konstant under bræens tilbagevigen er kun afhængig af de afstængende pas. Som fig. 5 viser stænges sjøen til II lige så vel ved bræen B som ved bræen A, når blot ikke

---

\*) Kartets pile efter Jamieson. Bevægelsen vestover ved m kan forklares som forårsaget af en senere lokal Loch Treig-bræ, hvis vifteformige ende har lagt op koncentriske moræner.

bræen har trukket sig tilbage fra et skar i lavere nivå G. Isåfald vil sjøen udtappes til nyt nivå (III).

Teorien har endvidere den fordel, at den bedre end nogen af de tidligere forklarer, hvorfor Parallel Roads er indskrænket til en enkelt lokalitet. Havdannelse, opdæmning af sjøer ved tværbræer og sammenstød af nabobræer må have en større udbredelse. En opstemning af sjøer på den måde jeg her har udviklet det, må nødvendig være indskrænket til de steder, hvor indlandsisen har bevæget sig opad bakke.

Men hvad mere er, teorien giver os netop slige forhold, som i rigt mål skaffer det værktøi, som i hvert fald indgravningen af seter i fast fjeld fordrer. Hertil trænges sikkerlig mere end brændingen ved kysten af en trang sjø, som kanske ikke engang er istand til afleire løst materiale til fjære-sete. — De bræer, som skyder ud i de inddæmmede sjøer, vil nemlig ved en vis dybde afgive små isfjelde, som vil stues sammen i det lukkede vand, skure ind på fjeldsiderne på udsatte steder, særlig hvor ingen langgrund fjære holder dem ude, altså ved bratte fjeldvægge og kunne sætte sit mærke som en horisontal fure — en sete i fast fjeld.

Hvorvidt de tillige ved at stue op det løse materiale, som fra fjeldsiderne bringes ned til fjæren, til bratte mæler eller ved at grave i dette direkte deltager i formdannelsen også af løsterrængets strandlinjer, vil kanske detaljerede snit kunde oplyse om. Bølgeslaget har neppe været alene om det.

I hvert fald — sådanne opstemmede, isfyldte sjøer synes bedre end andre at måtte kunne give alle betingelser for dannelsen af de forskjellige former, hvori seterne optræder.

Har man nu nogen grund til at tro at nogen sådan bevægelse opad bakke som i Lochaber har fundet sted også i Østerdalen? Man vil straks indvende, man har ikke her noget høiere ragende fjeldparti, der som Ben Nevis har kunnet give bevægelse rygstød. Men i en plastisk masse som bræisen vil en bevægelse opad kunne foregå i enkelte partier uden

dette. Betingelserne for at punktet  $m$  i fig. 6 af trykket ovenfra skal kunne drives opad er at friksjonsmodstanden  $m$   $C$  er større end friksjonen  $m$   $B + BA +$  hvad der skal til for at hæve  $m$  til  $B$ 's høide, en betingelse, der ved stor længde af  $BC$  og svag faldvinkel  $s$  let kan indtræde. Hertil må føies, at denne bevægelse opad, som her er tale om, ikke er meget stor og særlig gjælder dalen. Plataået over dalen er i hvert fald meget fladere. For at føre en bundmoræne over Mjøsen ved vi at isen må have bevæget sig fra  $\div 450$  m. til  $+ 180$  m.  $= 630$  m. opad bakke. Ser man så efter beviser for en sådan bevægelse op vasdragene i Østerdalen, må man søge dem i skuringsmærker og flytblokke. Tager man for sig Hørbyes kart over skuringsmærkerne\*) finder man ganske rigtig i dette strøg fra  $62^\circ$  og opover til det nuværende vandskil pilene regelmæssig rettede mod  $NV$ . (se kart no. 2). Kjerulfs kart viser samme strøg skrås på dalene, men pilespidtene er tagne bort, mens derimod hans kart over de erratiske blokkes vei giver samme vidnesbyrd for store dele af det omhandlede parti\*\*). Og da man med Hørbye (gjentaget af Kjerulf) må indrømme, at »ingen vil vel uden sikre data lettelig bestemme sig for den antagelse, at de erratiske blokke er gået opad bakke«, med andre ord at man stadig bryder sit hoved med at finde hjemsted for flytblokkene ovenfor, medens et nærliggende sted nedenfor ikke let falder en ind, synes det rimeligt at en flytning mod vasdragene kan have en større udbredelse end noteret.

I hvert fald — en sådan flytning er bevist at have fundet sted over en så stor strækning af det strøg, hvor seterne optræder, at denne væsentlige lighed i naturforhold med Lochaber dermed er slået fast. Det er opadgaaende bræer,

\*) Observations sur les phénomènes d'érosion en Norvège 1857.

\*\*\*) Udsigt over det sydlige Norges geologi Pl. V og VI. Ved enkelte af de af Kjerulf nærmest søndenfor noterede blokke med modsat retning, v. no. 37 og 39 heder det: kan være søndenfra; no. 38 er blot en formodning.

som når de ikke mere når over bakken stemmer op sjøer til vandskillet.

Man ledes herved til at undersøge, hvorledes skarhøiderne stemmer med setehøiderne. Når man i en forholdsvis så enkelt bygget dal som Glen Roy — Spey finder hele tre af skarhøidene bestemte nivåer, kan det ikke forundre, at man i Glommens vidstrakte, komplicerede vasdrag finder endnu flere, og at en udredning af alle forbindelser her ikke er gjort ved nogle få målinger. Ser man imidlertid efter på listen s. 235 vil man finde, at de væsentligste forhold ved hovedvasdragene i den undersøgte del stemmer upåklagelig. De vigtigste skarhøider, nemlig de ved Glommens og Follas udspring er 664 m. og 951 m., hvilket netop falder ind med de mest udprægede nivåer af seterne. Til det første svarer hele 8 seter og 3 større moer — det skarpest udprægede nivå, der er undersøgt. Til det andet må tilsvarende seter søges i Foldalen. Man finder her høiderne 950—948—923 — en iøinefaldende overensstemmelse, da de andre nivåer falder langt fra denne samlede gruppe. — Også andre skarhøider kan tænkes bragt i forbindelse med seter, f. ex. passet nord for Jerkin 1040 m. med Stygfjeld-Kringla 1090 m., og mærkelig nok falder den midtre setehøide i Vesleådalen 722 m. nøiagtig sammen med Tyldals skar over til Tønset\*). Imidlertid — der trænges en mere udstrakt undersøgelse med nøiagtige målinger over en hel række skar og tilgrænsende seter for at bringe rede i den indviklede sammenhæng. Seterne vilde være veiledere og burde følges såvidt nemlig i sammenhæng. Men allerede ved de målinger, som haves, er sammenhængen mellem setehøide og skarhøide tydelig, og

---

\*) Ved dette skars høide er ikke Tyldalsseten og Rendalens ene sete bragt ud af forbindelse med de øvrige i 660 nivået. Høiden mellem dalene er ved Jutulhugget ca. 20 m. under dette og skylder kanske denne forbindelse sin eiendommelige overflade.

dermed den ensartede oprindelse af seter og Parallel Roads bevist, — de er dannet i sjøer, der er stemmede op til vandskillene ved sammenhængende bræmasser, der skyder bræer op gennem alle dalene.

Hvorledes skal man så forklare sig tilværelsen af en sådan sammenhængende bræmasse liggende tvers for ikke blot Glommens vasdrag men også Lågens, Klaras, ja endog Ljusnas. I sådan udstrækning fra vest til øst forefindes nemlig setedannelsen. Mortenson havde hørt omtale en sete i Sel og seet en i Våge\*) og Tørnebohm (Förhandling i Sv. geol. Fören. B. 1) beskriver dannelser, der utvivlsomt er seter, fra Rendalssølen og fra fjeldene syd for Långå i Herjedalen. Som tidligere omtalt viser de erratiske fænomener, at indlandsisens bræskille, hvorfra isbevægelsen udgik, har ligget langt sønder for det nuværende vandkil og man vil derfor kunne tænke sig at den sidste sammenhængende rest af den vilde blive liggende igjen netop hvor den havde havt sin største tykkelse. Den nordlige rand af dette sidste isdække skulde altså være at søge langs sete-regionens sydkant. Dette vilde være omtrent linjen Sel — Atneosen\*\*) — Lomnæssjøen — Rendalssølen — Långå — en linje der — når et par observasjoner sættes ud af betragtning — nøiagtig falder sammen med det efter Hørbyes kart optrukne bræskille. Observationerne bestyrke hverandre. — Sydkanten vilde være at sætte så langt syd, at man i hvert fald havde en pålidelig dam for den ca. 280 km. lange og indtil 300 m. dybe Glomsjø (662 m. o. h.) og for den kortere men dybere Rendalssjø. — Lad os dernæst se

---

\*) Mærk også de uhyre terasser i åben situasjon ved Domås (612—628 m.), i anledning af hvilke Kjerulf siger (Skuringsmærker I 1871) »at man på stedet ikke har let for at begribe hvad der har spærret bassinet.« Hr. cand. min. Joh. Vogt har meddelt mig, at han har i 1883 seet en horisontal linje i fjeldet S. f. Lesje.

\*\*) De her optrædende seter (if. Mortensen, Blytt) hindrede mørket mig fra at observere.

hvorledes afsmeltningen fra bræens yderkanter af må tænkes foregået. — Følger man på Kjerulfs kart over »isdækket mærket ved moræner« (Pl. 7 i »Udsigten«) de suksessive stadier fra Kristianiafjorden nordover kommer man til et resultat, der aldeles ikke stemmer med det her fordrede. Fra de meget sammenhængende morænerækker 5 og 6 kommer man her til en mere opløst no. 7 og så til de lokale bræers række 8. Men herved er man bragt lige op til vandskillet, man er bragt til at søge den sidste nogenlunde sammenhængende bræ-rests sydkant henimod stiftsgrænsen. Men hvor langt er imidlertid nordkanten rykket tilbage i det fladtbyggede trondhjemske? Kjerulf opfører her ingen følge af 6—8 rækker som søndenfjelds, medens dog de orografiske forhold og den klimatiske ensartethed med storsikkerhed fordrer en temmelig jevnbyrdig afsmeltning nordenfra. Kart II giver forskjellige stadier i afsmeltningen således som jeg anser dem sandsynligst. En sammenligning vil vise at den optager største delen af Kjerulfs moræner, kun forbundne på en anden måde. I er Kjerulfs linje\*), II forsøger at give isens udbredelse, da landet lå 180 m. lavere end nu og retter sig delvis efter det relativt sikre grundlag, det marine trins høide\*\*). På vestlandet gik endnu svære bræer ud i fjordene. III er ført et stykke ovenfor det øverste marine trin og støtter sig til flere moræner, på vestlandet til de mange sjøer med moræner foran osen, hvis regelmæssige optræden Helland har gjort opmærksom på. Man opdager her også den eiendommelige række af store indsjøer i ens høide, som ligger mellem III og IV:

Mjøsen 125

og fuldstændig analogt

Randsfjord 130

nordenfjelds Selbosjø 160.

\*) Her som også ved talen om nordgrænsen af setesjøernes brædam er linjen ført gennem dalene. På fjeldplatået gik isdækket ofte langt udenfor dette.

\*\*) Denne er som bekjendt næsten lige stor i det trondhjemske som søndenfjelds.

Spirillen 163.

Krøderen 132.

Soneren 118.

Tinnsjø 188.

En regelmæssighed altså, der også tyder på ensartede overflade-geologiske forhold i dette belte. IV støtter sig væsentlig til Kjerulfs række 6 i det sydlige. — En nogenlunde tilsvarende afsmeltning nordenfra bringes os nu alt til henimod vandskillet, til en del moræner af Kjerulfs række 8\*). Nu er spørgsmålet hvorledes smeltningen vil ske videre. Bræen er nu i sin helhed — vi holder os fremdeles til dalene — kommet over på det sydlige skråplan. Den vil dermed også i sin nordlige del være kommen på glid sydover d. v. s. isbevægelsen udad vil aftage og omsider næsten forsvinde på nord-siden, som følge hvoraf afsmeltningen meget rask vil drive bræenden sydover. Denne tilbagevigning sydover vil ske så meget hurtigere, som bræen lidt efter lidt vil plattes af nordentil og altså tyndes ud, således som fig. 9 viser. — Bræens nordkant må altså i næste periode rykke langt hurtigere sydover end sydkanten, afstauden mellem IV og V blive langt større nordpå end sydpå og altså den sidste brærest blive liggende et godt stykke søndenfor vandskillet.

Selv om man ikke føler sig overbevist om at de »flyttede masser, blokke, søndermalet berg og jøkelgrus« i dalene og på fjeldvidderne lader sig forbinde til sådanne sammenhængende rækker, som forresten muligens er at sætte i forbindelse med teorien om vekslende klimatiske perioder, kan man dog ikke nægte, når man ser på det ældre kart af Th. Kjerulf og Thellef Dahl (1858—1865), hvor disse

---

\*) Beltet mellem dens søndre linje IV og bræskillet viser den samme regelmæssige række sjøer som er så iøinefaldende i det tilsvarende belte nordenfor i svensk Norrland, men som man tidligere forgjæves har søgt efter i Norge Smågn. også indsjørækken langs bræskillet's østkant på Nyzeeland.



masser træder tydeligst frem, at den overveiende største udbredelse følger de søndre linjer IV og V på en måde som tyder på, at bræerne længe har holdt sig her.

Enten man tænker sig en regelmæssig afsmeltning ovenfra med høideaksen bestemt efter »det erratiske fænomen« eller følger brændens tilbagerykning kommer vi til det samme resultat, den sidste rest af indlandsisen liggende tværs over dalene som en dam så langt syd, at sete-sjøerne kan stemmes op i meget betydelige længder, og dermed er betingelsen for dannelsen af seter efter den her udviklede teori indtrådt.

De mægtige terrasser, som er eiendommelig for dette strøg, har også samtidig fået sin forklaring, forsåvidt deres dannelsesforhold fordrer en sjø.

Foruden disse sandterasser vil man kanske også søge aflagringer af ler i disse store sjøer. Nu skal straks svares, i kvartsitfjeldet kan man ikke vente at finde ler, og de strøg, jeg i sommer besøgte, er væsentlig kvarts. Trods dette foreligger der fra den seteregion, hvis grænser jeg har forsøgt at antyde, netop nogle af de få optegnelser om ler i høifjeldsdalene. Jeg har nævnt at Tørnebohm har seet seter syd for Långå i Herjedalen. Skuringsmærkerne går også her opover dalen, hvad de også gjør i svensk lappmark henimod grænsen. Nu fortæller A. Erdmann i »Sveriges quartäre bildningar« s. 139: »Och skulle vid en närmare undersökning den leraflagring som år 1861 anmärktes ved Wikens by öster om Hede kyrka i Herjedalen (lige ved Långå) äfvensom de hvilka i 1862 uppmärksammades i Qvikjoks lappmark — — — befinnas verkligen tilhöra hvarfiga leran eller kunne med den samma parralleliseras, hvilket de tagne pröfven synes visa, så skulle denne bildning i Sveriges nordligsta delar uppnå en höid af 1000 — 1300' öfver nuvarande hafsyta.« I hele det øvrige Sverige når den i høiden til 800' og som den store regel kun til 500' (Norge 600'). Det her nævnte er de eneste undtagelser. Et blik på hans oversigtskart over glaciallerens udbredning viser hvor

yderlig pludselig spranget sker. Men dette sprang bringer os netop over i sete-regionen, som den er udpeget ved skuringsmærkerne opad dalene. Den her udviklede teori lader os slippe fra den halsbrækkeude slutning, Erdmann af lerforekomsten føler sig tvungen til — at den giver »måttet af den nedsjunkning, som dessa trakter en gang under glacialtiden varit underkastade.« I fuld konsekvens måtte Erdmann for Østerdalens vedkommende gået til en nedsenkning af indtil 2000'. Thi blandt de mange værdifulde meddelelser, jeg fik fra hr. P. Mortensen var også underretningen om, at han havde fundet »hvarfig lera« og det med marlekor i, ved Einunda i Foldalen.

Ved at tænke os leret afsat i bræsjøer vil vi kunne holde os til den ellers så sikrede almindelige hævnning af 5—600'.

Også på dette punkt bringer teorien altså en utvungen forklaring, og dette forhold vilde kanske alene være nok til at man måtte supponere opstemmede sjøer på de steder, hvor jeg til forklaring af setedannelsen har forudsat dem.

De af hinanden uafhængige fænomener, skuringsmærkernes og blokflytningens retninger og morænerækkernes, seternes og indlandslerets udbredelse leder os således til de samme slutninger og sætter os derved i stand til at danne os en klarere forestilling om forholdene under istidens slutning.

Den eiendommelige beliggenhed af bræskillet indenfor vandskillet, som induktionen fra disse fænomener har bragt os til at antage, synes også direkte at kunne deduceres. Sneophobningøn på det enkelte sted betinges af forholdet mellem nedbørens mængde (reduceret til hvad der blir igjen som sne) og den hurtighed, hvormed den igjen borttransporteres. Når vi nu følger bræen indover over underlagets høideakse, så vil, da bræoverfladens krumningsmål i det hele varierer meget langsomt (sml. Nordenskiølds sidste indlandsreise i Grønland), nedbørens mængde ligeledes kun langsomt forandres. Derimod vil borttransporteringen pludselig møde

størremodstand, idet bræbevægelsen går over fra nedad bakke til opad bakke eller nedad en meget længere og svagere skrånende heldning. Følgen må blive en større ophobning af sne indenfor underlagets høide-akse, indtil trykket igjen bringer ligevægt mod den øgede modstand. Bræskillet må komme til at ligge indenfor vandskillet.

September 1885.

---

Først efter at foranstående var trykt har jeg læst A. G. Høgboms »Iakttagelserörande Jemtlands glaciale geologi«, akad. afhandl. 1885, hvori skuringsmærkernes retning vestover påvises til østenfor Storsjön. Herved kommer den hos A. Erdmann (l. c.) omtalte forekomst af glacialler i 750' høide ved Gesund ind i sete-regionen, og derved blir det marine trin nordenfor det store indsjøbelte, undtagelsesfrit lavere end 550'. — S. 30 heder det videre: »På nordsiden af det bratte fjeld Drommen (lidt i V. for Storsjön) sees flere horisontale linjer i forskjellig høide. En af disse linjer, som ligger straks over skoggrænsen, er synlig i en strækning af flere kilometer undertiden dog afbrudt af ur. Seet fra dalen eller fra det tversoverfor liggende Vesterfjeld har linjen en skuffende lighed med de norske strandlinjer. Ved et flygtigt besøg under yderst ugunstigt veir fandt jeg denne linje nedenfor Dromskaret fremtrædende som et plan med 10—15° heldning og 12—20 skridts bredde. Fjeldvæggen lige over og under havde 35° fald. Fast fjeld fandtes ikke i nærheden, men skråningen bestod af grus og kvartsit-»skärfvor«. Denne terrasse, som var den uden sammenligning bedst udviklede og længste, sees fortsat på østsiden af Drommen og Oviksfjeldene med samme høide men længere syd nærmere fjeldets fod. Også på Vesterfjellet findes små antydninger til den, endskjønt det som mindre brat ikke er så skikket for dannelsen af slige terrasser. Muligens er også terrasserne om-

kring Areskutan af samme art. De sees godt fra Kallsjøn.«  
— Som man ser en beskrivelse af seter på begge sider af en dal, som ikke kan tages feil af. — Seternes optræden i dette strøg, hvor bræbevægelsen har gået mod bakke, stemmer fuldstændig med den her udviklede teori om opstemmede sjøer og sætter os istand til at trække grænserne for seteregionen videre nordover.

---

## Untersuchungen über Transformationsgruppen II

von

SOPHUS LIE.

Diese Abhandlung enthält wie die vorangehende eine Reihe getrennte Untersuchungen<sup>1)</sup>, die sich auf Transformationsgruppen beziehen. Die betreffenden *Resultate* sind im Wesentlichen schon früher publicirt worden.

### § 1.

**Bestimmung aller  $r$ -gliedrigen Gruppen von Punkttransformationen eines  $n$ -fach ausgedehnten Raumes.**

Zunächst entwickeln wir eine allgemeine Theorie, von welcher schon bei wiederholten Gelegenheiten specielle Anwendungen gemacht worden sind.

1. Es sei  $X_1f \dots X_rf$  eine  $r$ -gliedrige Gruppe  $G_r$  und  $F$  irgend eine Figur im Raume der  $x$ , welche bei jeder Transformation  $S$  der Gruppe eine bestimmte neue Lage  $F'$  annimmt. Um alle Fälle zu berücksichtigen, werden wir voraussetzen, dass  $F$  gerade  $m$  infinitesimale Transformationen unserer Gruppe gestattet; diese infinitesimalen Transformationen, etwa  $X_1f \dots X_mf$ , erzeugen dann bekanntlich eine  $m$ -gliedrige

<sup>1)</sup> Die Entwicklungen des Textes sind Vorarbeiten zu einem grösseren Werke, das ich zur Zeit mit stilistischem und sprachlichem Beistande von Dr. F. Engel in Leipzig vorbereite.

Untergruppe  $g_m$ , deren Transformationen sämtlich unsere Figur  $F$  invariant lassen.

Wenden wir jetzt auf  $F$  die allgemeinste Transformation  $S$  der Gruppe  $G_r$  an, so erhält, wie wir sehen werden,  $F$  im Ganzen, nicht  $\infty^r$  sondern nur  $\infty^{r-m}$  verschiedene Lagen  $F'$ , deren Inbegriff bei der Gruppe  $G_r$  invariant ist. Dass der Inbegriff von allen Figuren  $F' = FS$  die Gruppe  $G_r$  gestattet, ist ohne Weiteres klar, denn jedes  $F'$ , welches aus  $F$  durch eine Transformation  $S$  entstanden ist:  $(F') = (F)S$ , geht bei einer beliebigen Transformation  $S_1$  der Gruppe  $G_r$  über in:

$$(F') S_1 = (F) S S_1 = (F) S_2,$$

sodass jede Figur  $(F')S_1$  mit einer gewissen Figur  $F'$  zusammenfällt. Die Schaar  $F'$  bleibt also wirklich invariant bei der Gruppe  $G_r$ . Um jetzt noch zu beweisen, dass diese Schaar bloss aus  $\infty^{r-m}$  Figuren besteht, bedienen wir uns eines früheren Satzes. Wir haben nämlich früher gezeigt, dass alle  $\infty^r$  Transformationen  $S$  einer  $r$ -gliedrigen Gruppe  $G_r$  sich in gewissem Sinne aus  $\infty^m$  und  $\infty^{r-m}$  unter ihnen zusammensetzen lassen. Wählten wir nämlich irgend welche  $\infty^m$  Transformationen  $T$  der Gruppe aus, so konnten wir immer  $\infty^{r-m}$  andere Transformationen  $T$  unserer Gruppe derart auswählen, dass  $TT$  allgemeines Symbol einer Transformation  $S$  wurde. Davon machen wir jetzt eine Anwendung. Als Transformationen  $T$  wählen wir die  $\infty^m$  Transformationen der oben besprochenen  $m$ -gliedrigen Untergruppe  $g_m$  und bestimmen darnach die  $\infty^{r-m}$  Transformationen  $T$  nach der früher angegebenen Weise. Da nach dem oben Gesagten  $(F)T = (F)$  ist, erhalten wir

$$(F)S = (F)TT = (F)T,$$

das heisst:  $F$  nimmt vermöge der  $\infty^r$  Transformationen  $S$  gerade soviel, nämlich  $\infty^{r-m}$  Lagen an, als vermöge der  $\infty^{r-m}$  Transformationen  $T$ . Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

*Satz.* Gestattet eine Figur gerade  $m$  unabhängige infinitesimale Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe  $G_r$ , so

nimmt sie bei Ausführung aller Transformationen der  $G_r$  genau  $\infty^{r-m}$  verschiedene Lagen an, deren Inbegriff bei der Gruppe invariant bleibt.

Nunmehr wenden wir auf den Inbegriff der  $\infty^{r-m}$  Lagen von  $F$  die Transformationen unserer Gruppe  $G_r$  an. Der Inbegriff bleibt invariant, aber seine einzelnen Figuren werden unter einander vertauscht; dabei kann jede Figur in jede andere übergeführt werden, denn ist etwa  $(F_1) = (F)S_1$ ,  $(F_2) = (F)S_2$ , so ergibt sich  $(F_2) = (F_1)S_1^{-1}S_2 = (F_1)S_3$ . Sind  $u_1 \dots u_{r-m}$  die Parameter von den einzelnen Figuren unserer Schaar, so geht durch Ausführung einer Transformation  $S$  jede Figur mit den Parametern  $u_1 \dots u_{r-m}$  in eine gewisse andere Figur der Schaar mit etwa den Parametern  $u'_1 \dots u'_{r-m}$  über. Hat nun  $S$  die Form

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r),$$

was wir durch die Bezeichnung  $S_{(a)}$  andeuten wollen, so bestehen gewisse Gleichungen

$$u'_k = \omega_k(u_1 \dots u_{r-m}; a_1 \dots a_r) \quad (k = 1 \dots r-m)$$

und zwar bilden dieselben nothwendig eine Gruppe. Führen wir nämlich jetzt eine Transformation  $S_{(b)}$  aus, so erhalten wir neue Gleichungen

$$u''_k = \omega_k(u'_1 \dots u'_{r-m}; b_1 \dots b_r),$$

während sich auf der andern Seite wegen  $S_{(a)}S_{(b)} = S_{(c)}$  ergibt:

$$u''_k = \omega_k(u_1 \dots u_{r-m}; c_1 \dots c_r),$$

wobei die  $c_k$  jene bekannten Funktionen  $\varphi_k(a, b)$  bedeuten. Damit ist also wirklich gezeigt, dass die Gleichungen  $u'_k = \omega_k(u, a)$  eine Gruppe und zwar eine mit der ursprünglichen Gruppe  $x'_i = f_i(x, a)$  oder  $G_r$  isomorphe Gruppe bilden. Die Gruppe  $u'_k = \omega_k(u, a)$  ist ausserdem transitiv, da sie jede Figur  $F$  in jede andere und also auch jedes Werthsystem  $u_k$  in jedes andere überführen kann; unter ihren  $r$  Parametern  $a_1 \dots a_r$  sind daher mindestens  $r-m$  wesentlich.

Es lassen sich einfache Kriterien aufstellen, aus denen entschieden werden kann, wie viele wesentliche Parameter die Gruppe  $u'_k = \omega_k(u, a)$  wirklich enthält.

Die Figur  $F$  gestattet alle Transformationen  $T$  einer  $m$ -gliedrigen Untergruppe  $g_m$ , ebenso gestattet  $(F') = (F)S$  die Transformationen  $S^{-1}TS$ , denn es wird ja:

$$(F')S^{-1}TS = (F)TS = (F)S = (F').$$

Die Transformationen  $S^{-1}TS$  bilden eine  $m$ -gliedrige Untergruppe  $g'_m$ , welche innerhalb  $G_r$  offenbar mit der Gruppe aller  $T$  d. h. mit  $g_m$  gleichberechtigt ist. Die Gruppe  $g'_m$  ist ausserdem die allgemeinste in  $G_r$  enthaltene Untergruppe, welche  $F'$  invariant lässt; denn jede Transformation  $T'$ , welche ergibt  $(F')T' = (F')$ , genügt wegen  $(F') = (F)S$  der Bedingung:

$$(F)ST' = (F)S,$$

mithin ist  $ST'S^{-1}$  eine Transformation  $T$  und  $T'$  eine Transformation  $S^{-1}TS$  d. h.  $T'$  ist in  $g'_m$  enthalten. Wir haben daher zunächst den Satz:

*Satz.* Ist  $F$  irgend eine Figur, welche alle Transformationen einer  $m$ -gliedrigen Untergruppe der  $r$ -gliedrigen Gruppe  $G_r$  gestattet und daher bei den  $\infty^r$  Transformationen dieser Gruppe nur  $\infty^{r-m}$  Lagen  $F$  annimmt; so gestattet auch jedes  $F'$  eine  $m$ -gliedrige Untergruppe von  $G_r$ ; alle diese  $m$ -gliedrigen Untergruppen sind innerhalb der  $G_r$  mit einander gleichberechtigt.

Hat nun die Gruppe

$$u'_k = \omega_k(u_1 \dots u_{r-m} \ a_1 \dots a_r)$$

nur  $r-q$  wesentliche Parameter, also nur  $r-q$  unabhängige infinitesimale Transformationen, so ist sie mit der Gruppe  $X_{k,f}$  meroedrisch isomorph; es giebt dabei in der Gruppe  $X_{k,f}$  eine invariante  $q$ -gliedrige Untergruppe  $g_q$ , welche der identischen Transformation der Gruppe  $u'_k = \omega_k$  entspricht. Diese  $q$ -glied-



rige Untergruppe ist dadurch bestimmt, dass sie allen früher besprochenen Untergruppen  $g'_m$  gemeinsam ist, und dass sie dabei die grösste Untergruppe ist, welche diese Forderung erfüllt.

*Theorem.* Hat man eine  $r$ -gliedrige Gruppe  $X_1 f \dots X_r f$  und irgend eine Figur  $F$ , welche gerade  $m$  unabhängige infinitesimale Transformationen der  $G_r$ , etwa  $X_1 f \dots X_m f$  und also auch die von denselben erzeugte  $m$ -gliedrige Untergruppe  $g_m$  zulässt, so nimmt  $F$  bei allen Transformationen von  $G_r$  im Ganzen  $\infty^{r-m}$  verschiedene Lagen an, deren Inbegriff sich gegenüber der Gruppe  $G_r$  invariant verhält. Charakterisirt man die einzelnen Lagen von  $F$  durch  $r-m$  Parameter  $u_1 \dots u_{r-m}$  und vertauscht nun diese Lagen unter einander vermöge der Transformationen von  $G_r$ , so erhält man zwischen den alten und den neuen Parametern der  $F$  gewisse Gleichungen:

$$u'_k = \omega_k(u_1 \dots u_{r-m}; a_1 \dots a_r) \quad (k = 1 \dots r-m).$$

Dieselben bestimmen eine transitive mit  $G_r$  isomorphe Gruppe. Ist  $g_q$  die grösste in  $g_m$  enthaltene Gruppe, welche in  $G_r$  invariant ist, so enthält die Gruppe  $u'_k = \omega_k(u, a)$  genau  $r-q$  wesentliche Parameter.

Die Zahl  $q$  kann hierbei jeden der Werthe  $0, 1 \dots m$  haben, für  $q = 0$  reducirt sich  $g_q$  auf die Identität, für  $q = m$  ist  $g_q$  mit  $g_m$  selbst identisch.

Besonders erwähnen wollen wir noch den Fall, dass  $F$  gar keine infinitesimale Transformation der Gruppe  $G_r$  gestattet. Die mit  $G_r$  isomorphe Gruppe hat dann die Form

$$u'_k = \omega_k(u_1 \dots u_r; a_1 \dots a_r) \quad (k = 1 \dots r),$$

sie ist einfach transitiv und daher mit  $G_r$  holoedrisch isomorph.

Wir haben also hier eine allgemeine Methode, um eine einfach transitive Gruppe von gegebener Zusammensetzung aufzustellen. Die seinerzeit angewandte Methode ist ein specieller Fall der jetzigen allgemeinen. Damals benutzten

wir nämlich als Figur  $F$  eine Anzahl von  $r$  Punkten  $(x_i^{(1)} \dots x_i^{(r)})$ . Da über die Lage dieser  $r$  Punkte eine specielle Voraussetzung nicht gemacht war, konnte auch die aus ihnen bestehende Figur keine von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe  $X_k f$  zulassen. Denn die Gruppe  $X_k f$  lässt sicher keinen Punkt von allgemeiner Lage invariant, es kann daher in ihr sicher höchstens  $r-1$  unabhängige infinitesimale Transformationen geben, welche einen solchen Punkt fest lassen; aus diesen etwaigen  $r-1$  können sich wieder höchstens  $r-2$  unabhängige infinitesimale Transformationen zusammensetzen lassen, für welche noch ein zweiter Punkt von allgemeiner Lage stehen bleibt u. s. f., man erkennt so schliesslich, dass es in der Gruppe keine infinitesimale Transformation giebt, bei welcher gleichzeitig  $r$  Punkte von allgemeiner Lage invariant bleiben. —

Eine sehr viel einfachere Methode als die oben angegebene führt zum Ziele, wenn man die endlichen Gleichungen einer Gruppe von gegebener Zusammensetzung kennt. Eine solche Gruppe

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

mit  $r$  wesentlichen Parametern sei vorgelegt. Wir fügen hinzu

$$x''_i = f_i(x'_1 \dots x'_n; b_1 \dots b_r)$$

und erhalten durch Zusammensetzung:

$$x''_i = f_i(f_1(x, a) \dots f_n(x, a); b_1 \dots b_r),$$

während andererseits sich etwa:

$$x''_i = f_i(x_1 \dots x_n; a'_1 \dots a'_r)$$

ergiebt. Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für  $x''_i$  bestimmen sich, wie schon im Anfange gezeigt, die  $a'_k$  als Functionen der  $a_k$  und  $b_k$ , nämlich:

$$a'_k = \varphi_k(a_1 \dots a_r; b_1 \dots b_r).$$

Fassen wir hierin die  $a_k$  als Variabeln, die  $b_k$  als Parameter auf, so bestimmen diese Gleichungen nach einer schon früher gemachten Bemerkung eine  $r$ -gliedrige Gruppe; dieselbe ist einfach transitiv und mit der vorgelegten Gruppe holoeidrisch isomorph.

*Satz.* Kennt man die endlichen Gleichungen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe, so kann man immer ohne Integration die endlichen Gleichungen einer holoeidrisch isomorphen, einfach transitiven Gruppe aufstellen.

Man bedarf jedoch nicht einmal einer Gruppe von der betreffenden Zusammensetzung, man braucht nur die Zusammensetzung selbst zu kennen d. h. ein System der  $c_{iks}$ , welches alle Relationen von der Form

$$\sum_1^r (c_{ikr} c_{rjs} + c_{kjr} c_{ris} + c_{jlr} c_{rks}) = 0, \quad c_{iks} = -c_{kis}$$

befriedigt. Bekanntlich ist es ja dann immer möglich  $r$  unabhängige lineare homogene infinitesimale Transformationen von der Form

$$U_k f = \sum_j \sum_i g_{kij} u_i \frac{\partial f}{\partial u_j} \quad (k = 1 \dots r)$$

in  $r$  oder mehr Variabeln  $u$  aufzustellen, welche die Bedingungen

$$(U_k U_l) = \sum_1^r c_{kls} U_s f$$

befriedigen. Diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine  $r$ -gliedrige Gruppe, deren endliche Gleichungen durch ausführbare Operationen bestimmt werden können. Auf Grund des vorigen Satzes kann man jetzt eine einfache einfach transitive Gruppe bilden, welche die verlangte Zusammensetzung hat.

*Satz.* Kennt man ein System von Grössen  $c_{iks}$ , welches allen Relationen von der Form:

$$\sum_1^r (c_{ikr} c_{rjs} + c_{kjr} c_{ris} + c_{jlr} c_{rks}) = 0, \quad c_{iks} = -c_{kis}$$

genügt, so ist es immer möglich durch ausführbare Operationen die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe aufzustellen, deren infinitesimale Transformationen  $U_1 f \dots U_r f$  paarweise in der Beziehung

$$(U_k U_j) = \sum_s^r c_{kjs} U_s f$$

stehen.

Nicht überflüssig wird es sein, daran zu erinnern, dass alle gleichzusammengesetzten einfach transitiven Gruppen mit einander ähnlich sind; unsere verschiedenen Methoden zur Bestimmung von einfach transitiven Gruppen mit gegebener Zusammensetzung liefern daher nichts wesentlich verschiedenes, da alle die Gruppen, welche wir erhalten, ähnlich sind.

Um die vorangehenden Theorien an einem speciellen Falle zu erläutern, schalten wir ein Beispiel ein; freilich können wir dasselbe nur skizziren.

Wir betrachten die projectivische Gruppe einer Ebene, welche einen Kegelschnitt invariant lässt. Ist  $x^2 - 2y = 0$  die Gleichung des Kegelschnitts, so hat diese Gruppe offenbar die Form

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = (x^2 - y) \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Diese  $G_3$  ist daher transitiv und ihre Zusammensetzung wird durch die Relationen

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

charakterisirt. Wie wir leicht erkennen, folgt hieraus, dass die Gruppe gar keine invariante Untergruppe enthält, dass sie also einfach ist.

Man übersieht sofort, dass jede der  $\infty^1$  Tangenten des festen Kegelschnitts  $x^2 - 2y = 0$  gerade zwei infinitesimale Transformationen der Gruppe gestattet und es lässt sich zeigen, dass die Tangenten die einzigen Curven sind, welche diese

Eigenschaft haben. Ebenso sind solche Kegelschnitte, welche den festen Kegelschnitt in zwei Punkten berühren, die einzigen Curven, welche eine infinitesimale Transformation gestatten; als zweimal berührende Kegelschnitte, nämlich als unendlich schmale sind dabei auch alle Geraden anzusehen, welche den festen Kegelschnitt schneiden.

Wählt man nun als Figur  $F$  irgend eine andere Curve, welche also keine infinitesimale Transformation der Gruppe gestattet, so nimmt dieselbe bei der Gruppe  $\infty^3$  verschiedene Lagen an, und der Inbegriff dieser Lagen wird durch eine dreigliedrige Gruppe transformirt, denn die Gruppe  $X_k f$  ist einfach. Man findet also auf diese Weise eine einfach transitive, mit der ursprünglichen  $G_3$  gleichzusammengesetzte Gruppe im dreifach ausgedehnten Raume. Alle diese Gruppen sind mit einander ähnlich; eine der einfachsten unter ihnen ist die dreigliedrige Gruppe aller projectivischen Transformationen welche eine gewundene Curve 3. O. invariant lassen.

Führt man als Figur  $F$  einen zweimal berührenden Kegelschnitt ein, so erhält man eine mit der  $G_3$  holodrisch isomorphe Gruppe in einer zweifach ausgedehnten Mannichfaltigkeit. Hier giebt es einen bemerkenswerthen Gränzfall, den nämlich, dass die beiden Berührungspunkte zusammenfallen, dass also der Kegelschnitt  $F$  den festen Kegelschnitt vierpunktig berührt.

Führt man endlich als  $F$  eine Tangente des festen Kegelschnitts ein, so erhält man in einer einfachen Mannichfaltigkeit eine dreigliedrige Gruppe, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der geraden Linie ähnlich ist.

2. Gestützt auf die Theorien der vorigen Nummer können wir eine allgemeine Methode entwickeln, welche alle  $r$ -gliedrigen transitiven Gruppen durch ausführbare Operationen zu bestimmen gestattet.

Zunächst denken wir uns vermittelt einer algebraischen

Untersuchung sämtliche Systeme von  $c_{iks}$  bestimmt, welche alle Relationen von der Form:

$$\sum_1^r (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{k j\nu} c_{\nu is} + c_{j i\nu} c_{\nu ks}) = 0, \quad c_{iks} = -c_{kis}$$

befriedigen. Wir wählen sodann eines unter diesen Systemen der  $c_{iks}$  und bilden nach den früher gegebenen Regeln die endlichen Gleichungen einer einfach transitiven Gruppe  $G_r$  von der betreffenden Zusammensetzung. Die  $r$  unabhängigen infinitesimalen Transformationen derselben seien etwa

$$Y_k f = \sum_1^r \eta_{kj}(y_1 \dots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \dots r),$$

wobei demnach:

$$(Y_k Y_l) = \sum_1^r c_{kls} Y_s f.$$

Ist  $Y_1 f \dots Y_m f$  eine  $m$ -gliedrige Untergruppe  $g_m$  unserer einfach transitiven  $G_r$ , so bilden die  $m$  Gleichungen

$$Y_1 f = 0 \dots Y_m f = 0$$

ein  $m$ -gliedriges vollständiges System mit  $r-m$  unabhängigen Lösungen  $\omega_1 \dots \omega_{r-m}$ . Diese Gleichungen

$$\omega_1(y_1 \dots y_r) = K_1 \dots \omega_{r-m}(y_1 \dots y_r) = K_{r-m},$$

in welchen die  $K$  Constanten bedeuten, zerlegen den Raum der  $y$  in  $\infty^{r-m}$   $m$ -fach ausgedehnte Mannichfaltigkeiten  $M_m$ , deren jede bei allen Transformationen der Gruppe  $g_m$  invariant bleibt.

Unter diesen  $\infty^{r-m}$  Mannichfaltigkeiten  $M_m$  wählen wir irgend eine und führen auf sie alle Transformationen der  $G_r$  aus. Weil die betreffende  $M_m$  von den infinitesimalen Transformationen der  $G_r$  sicher  $m$  unabhängige gestattet, kann sie vermöge der  $G_r$  nicht mehr als  $\infty^{r-m}$  verschiedene Lagen annehmen; andererseits muss sie aber mindestens  $\infty^{r-m}$  verschiedene Lagen annehmen, denn die  $G_r$  ist transitiv

und führt also jeden Punkt  $y$  in alle  $\infty^r$  Punkte des Raumes über. Auf diese Weise zerlegt sich der ganze Raum in eine Schaar von  $\infty^{r-m}$  verschiedenen  $m$ -fach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten  $M_m$ , welche natürlich im Allgemeinen nicht mit der früher besprochenen Schaar  $M_m$  zusammenfallen werden. Analytisch lassen sich diese  $M_m$  durch Gleichungen in den  $y$  darstellen, welche  $r-m$  wesentliche Parameter  $u_1 \dots u_{r-m}$  enthalten. Wenden wir jetzt auf alle  $\infty^{r-m}$   $M_m$  gleichzeitig die Transformationen  $\sum e_k Y_k f$  der  $G_r$  an, so werden nach dem, was wir in der vorigen Nummer gesehen, die Parameter  $u_k$  durch eine transitive und mit  $G_r$  isomorphe Gruppe

$$u'_k = \Phi_k(u_1 \dots u_{r-m}; e_1 \dots e_r) \quad (k = 1 \dots r-m)$$

transformirt. Diese Gruppe enthält nur dann  $r$  wesentliche Parameter, ist also nur dann mit  $G_r$  holoedrisch isomorph, wenn die früher besprochene Untergruppe  $g_m$  weder selbst in  $G_r$  invariant ist, noch eine in der  $G_r$  invariante Untergruppe enthält.

Hiermit haben wir eine allgemeine Methode gewonnen, um  $r$ -gliedrige, transitive Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen. Es liegt nahe, sich die Frage vorzulegen, ob man auf diese Weise alle die betreffenden Gruppen findet. Wir werden zeigen, dass diese Frage mit Ja zu beantworten ist.

Von den einfach transitiven Gruppen können wir absehen, da zu jeder Zusammensetzung nur eine wesentliche einfach transitive Gruppe gehört, alle derartigen Gruppen sind ja mit einander ähnlich. Es sei deshalb  $r > n$  und:

$$x'_i = f_i(x_1 \dots x_n; a_1 \dots a_r) \quad (i = 1 \dots n)$$

eine  $r$ -gliedrige, transitive Gruppe; ferner seien

$$X_k f = \sum \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

irgend  $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen derselben. Wie früher setzen wir

$$\sum_i \xi_{ki}(x_1^{(\nu)} \dots x_n^{(\nu)}) \frac{\partial f}{\partial x_i^{(\nu)}} = X_k^{(\nu)} f$$

und bilden wie damals eine  $r$ -gliedrige, gleichzusammengesetzte Gruppe:

$$X_k f + X_k^{(1)} f + \dots + X_k^{(\tau)} f = Y_k f,$$

welche so beschaffen ist, dass keine Relation von der Form  $\sum \chi_k(x, x^{(1)} \dots x^{(\tau)}) Y_k f = 0$  besteht. Die Zahl  $\tau$ , welche nach den citirten Untersuchungen jedenfalls nicht grösser als  $r-1$  zu sein brauchte, kann jetzt, wie nebenbei bemerkt sein mag, selbst im ungünstigsten Falle so klein als  $r-n$  gewählt werden.

Das  $r$ -gliedrige vollständige System

$$Y_k f = X_k f + X_k^{(1)} f + \dots + X_k^{(\tau)} f = 0$$

hat nun eine Reihe unabhängiger Lösungen  $v_1 \dots$  und es ist ausgeschlossen, dass eine Relation von der Form:

$$\Omega(x_1 \dots x_n, v_1 \dots) = 0$$

besteht. In der That wir könnten auf dieselbe die Operation  $Y_k f$  anwenden und so käme:

$$\sum_i^n \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} \xi_{ki} = 0$$

und da wegen der Transitivität unserer Gruppe nicht alle Determinanten

$$\sum \pm \xi_{k_1 1} \dots \xi_{k_r r}$$

verschwinden können, würde folgen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0 \dots \frac{\partial \Omega}{\partial x_n} = 0,$$



was mit der Unabhängigkeit der Lösungen  $v$  in Widerspruch stände. Statt der  $x_1, x_1^{(1)} \dots x_1^{(r)}$  können wir daher als neue Variablen  $x_1 \dots x_n, v_1 \dots$  und endlich noch  $r-n$  weitere Veränderliche  $y_{n+1} \dots y_r$  einführen. Hierdurch erhalten die  $Y_k f$  die Form:

$$Y_k f = \sum_1^n \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{n+1}^r \varrho_{kj}(x_1 \dots x_n, y_{n+1} \dots y_r, v_1 \dots) \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

und stellen jetzt in den Variablen  $x_1 \dots x_n, y_{n+1} \dots y_r$  eine einfach transitive Gruppe dar, welche mit der Gruppe  $X_1 f \dots X_r f$  holoeidrisch isomorph ist.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass es möglich ist, die früher entwickelte allgemeine Methode derart auf die soeben aufgestellte einfach transitive Gruppe  $X_k f$  anzuwenden, dass wir gerade auf die ursprünglich vorgelegte Gruppe  $X_k f$  geführt werden.

Alle infinitesimalen Transformationen  $Y_k f$ , welche das Werthsystem  $x_1 = x_1^0 \dots x_n = x_n^0$  invariant lassen, erzeugen eine  $(r-n)$ -gliedrige Untergruppe  $g_{r-n}$ . Im Raume der  $x$  und  $y$  stellen diese Gleichungen  $x_i = x_i^0$  eine  $(r-n)$ -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit  $M_{r-n}$  dar. Führt man auf diese  $M_{r-n}$  alle  $\infty^r$  Transformationen der einfach transitiven Gruppe  $Y_k f$  aus, so erhält man eine Schaar von  $\infty^n$  Mannigfaltigkeiten  $M_{r-n}$ , nämlich

$$x_1 = \text{const.} \dots x_n = \text{const.}$$

Als Parameter dieser  $\infty^n$  Mannigfaltigkeiten  $M_{r-n}$  können wir daher  $x_1 \dots x_n$  selbst nehmen und diese werden bei den  $Y_k f$  offenbar durch keine andere als eben die Gruppe  $X_1 f \dots X_r f$  selbst transformirt.

Damit ist denn gezeigt, dass die von uns angegebene Methode *alle transitiven* Gruppen von gegebener Zusammen-

setzung liefert. Allein noch eine sehr wichtige Frage harret der Erledigung. Bei unserer Construction der Gruppen tritt eine ganze Reihe von Elementen auf, welche in hohem Grade willkürlich wählbar sind; es fragt sich daher, ob diese Willkürlichkeit immer auf das Resultat Einfluss hat, ob man immer wesentlich verschiedene Gruppen erhält. Als nicht wesentlich von einander verschieden betrachten wir dabei alle mit einander ähnlichen Gruppen.

Wir denken uns also wieder zu einem gegebenen Systeme der  $c_{iks}$  die einfach transitive Gruppe

$$Y_k f = \sum_j^r \eta_{kj}(y_1 \dots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_j} \quad (k = 1 \dots r)$$

oder  $G_r$  bestimmt, wählen eine  $m$ -gliedrige Untergruppe  $Y_1 f \dots Y_m f$  oder  $g_m$  aus und führen auf irgend eine bei  $g_m$  invariante Mannigfaltigkeit  $M_m$  alle Transformationen der  $G_r$  aus. Auf diese Weise erhalten wir eine Schaar von  $\infty^{r-m}$  Mannigfaltigkeiten, deren Parameter  $u_1 \dots u_{r-m}$  durch eine mit  $G_r$  isomorphe Gruppe

$$u'_k = \Phi_k(u_1 \dots u_{r-m}; e_1 \dots e_r)$$

transformirt werden.

Kaum nöthig wird es sein darauf aufmerksam zu machen, dass statt der Parameter  $u_1 \dots u_{r-m}$  beliebige andere  $r-m$  unabhängige Parameter eingeführt werden können; diess giebt eben nur Gruppen, welche mit der eben gefundenen  $u'_k = \Phi_k(u, e)$  ähnlich sind, also nichts Neues.

Vor allen Dingen erinnern wir uns aber der schon in der vorigen Nummer hervorgehobenen Thatsache, dass die Gruppe  $u'_k = \Phi_k(u, e)$  ganz von der Wahl der Variablen  $y$  unabhängig ist. Wir können daher in die infinitesimalen Transformationen

$$Y_1 f \dots Y_m f, Y_{m+1} f \dots Y_r f$$

irgend welche neue Variablen  $z_1 \dots z_r$  einführen und erhalten auf diese Weise etwa:

$$Z_1 f \dots Z_m f, Z_{m+1} f \dots Z_r f,$$

wobei jedes  $Z_k f$  direkt aus dem entsprechenden  $Y_k f$  entstanden sein mag. Diess ist eine neue Form unserer einfach transitiven Gruppe, welche wir ebensogut wie die erste unserer Bestimmung der Gruppen  $u'_k = \Phi_k(u, e)$  zu Grunde legen können. Da alle gleichzusammengesetzten einfach transitiven Gruppen ähnlich sind, hat also die Form, in welcher man die einfach transitive Gruppe benutzt, keinen Einfluss auf das Resultat.

Denken wir uns jetzt weiter aus  $Y_1 f \dots Y_r f$  andere  $r$  unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\bar{Y}_1 f \dots \bar{Y}_m f, \bar{Y}_{m+1} f \dots \bar{Y}_r f$$

linear zusammengesetzt, welche die Bedingungen

$$(\bar{Y}_k \bar{Y}_j) = \sum_1^r c_{kjs} \bar{Y}_s f$$

befriedigen, so giebt es bekanntlich sicher Variabeländerungen, welche jedes  $Y_k f$  in das entsprechende  $\bar{Y}_k f$  und damit die Gruppe  $G_r$  in sich überführen. Jede derartige Variabeländerung ist für die Gruppe  $u'_k = \Phi_k(u, e)$  ohne Bedeutung, dagegen verwandelt sie die Untergruppe  $Y_1 f \dots Y_m f$  der  $G_r$  in die gleichzusammengesetzte Untergruppe  $\bar{Y}_1 f \dots \bar{Y}_m f$ . Wir hätten daher auch von dieser letzteren anstatt von  $Y_1 f \dots Y_m f$  ausgehen können, ohne dass sich unser Resultat geändert hätte. Sind also zwei  $m$ -gliedrige Untergruppen der  $G_r$  mit einander gleichzusammengesetzt und können sie durch eine Variabeländerung, welche die  $G_r$  in sich transformirt, in einander übergeführt werden, so liefern sie keine wesentlich verschiedenen Gruppen  $u'_k = \Phi_k(u, e)$

Endlich lässt sich auch noch zeigen, dass es vollständig

gleichgültig ist, welche von den  $\infty^{r-m}$  bei der Gruppe  $Y_1 f \dots Y_m f$  invarianten  $M_m$  man auswählt.

Bekanntlich giebt es nämlich  $\infty^r$  Transformationen, welche jedes  $Y_k f$  in

$$Y'_k f = \sum_1^r \eta_{ki}(y'_1 \dots y'_r) \frac{\partial f}{\partial y'_i}$$

überführen; es sind diess die Transformationen der zu  $Y_1 f \dots Y_r f$  gehörigen reciproken Gruppe. Dieselben bestimmen sich aus dem vollständigen Systeme

$$Y_k f + Y'_k f = 0 \quad (k = 1 \dots r)$$

in der Form:

$$(A) \quad \Omega_k(y_1 \dots y_r, y'_1 \dots y'_r) = \text{const.} \quad (k = 1 \dots r).$$

Wie man leicht sieht und wie übrigens bereits in der vor Kurzem angeführten Nummer bemerkt ist, werden die bei der Gruppe  $Y_1 f \dots Y_m f$  invarianten Mannigfaltigkeiten  $M_m$  von den Transformationen (A) unter einander vertauscht. Da aber die Transformationen (A) jeden Punkt  $y$  in jeden andern überführen, können sie auch jeden der  $\infty^{r-m}$   $M_m$  in jede andere überführen, womit gezeigt ist, dass unter den  $M_m$  eine ganz beliebige gewählt werden kann, ohne dass dies auf das Ergebniss Einfluss hat.

Wir haben jetzt, so weit es sich in voller Allgemeinheit thun lässt, gezeigt, dass gewisse Willkürlichkeiten, die bei unserer Bestimmung der transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung auftraten, für das Resultat ohne Belang sind. In jedem einzelnen Falle wird dann noch speciell zu untersuchen sein, ob alle noch übrigen Möglichkeiten wirklich wesentlich verschiedene Gruppen liefern. Jedenfalls aber können wir sagen:

*Theorem.* Alle  $r$ -gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung lassen sich durch ausführbare Operationen bestimmen. Ist eine Zusammensetzung also ein Werth-

system  $c_{iks}$  gegeben, so hat man zunächst die zugehörige einfach transitive Gruppe  $y'_k = f_k(y, a)$  und ihre infinitesimalen Transformationen  $Y_1f \dots Y_rf$  aufzustellen. Sodann sind alle Typen von  $m$ -gliedrigen Untergruppen zu bestimmen, welche nicht durch eine Transformation, bei welcher die Gruppe  $Y_1f \dots Y_rf$  invariant bleibt, in einander übergeführt werden können. Aus jeder dieser Schaaren wählt man eine Gruppe, indem man jedoch nur solche Gruppen berücksichtigt, welche keine in  $Y_1f \dots Y_rf$  invariante Gruppe enthalten. Ist  $g_m$  eine der gewählten Gruppen, so hat man eine der  $\infty^{r-m}$   $m$ -fach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten, welche bei  $g_m$  invariant bleiben, zu bestimmen. Führt man auf dieselbe alle Transformationen der Gruppe  $y'_k = f_k(y, a)$  aus, so erhält man eine Schaar von Mannichfaltigkeiten mit  $r-m$  wesentlichen Parametern  $u_1 \dots u_{r-m}$ , welche nun ihrerseits bei der Gruppe  $y'_k = f_k(y, a)$  durch eine  $r$ -gliedrige, transitive Gruppe von der gegebenen Zusammensetzung

$$u'_k = \Phi_k(u_1 \dots u_{r-m}; a_1 \dots a_r) \quad (k = 1 \dots r-m)$$

transformirt werden. Auf diese Weise erhält man alle transitiven Gruppen von der gegebenen Zusammensetzung.

3. Es erübrigt jetzt noch Mittel und Wege anzugeben, um die intransitiven Gruppen mit einer gegebenen Anzahl von Parametern zu bestimmen. Nun lassen sich aber intransitive  $r$ -gliedrige Gruppen von gegebener Zusammensetzung construiren, welche beliebig viele Variablen enthalten, wie z. B. die mehrfach benutzte Gruppe

$$X_k f + X_k^{(1)} f + \dots + X_k^{(\nu)} f \quad (k = 1 \dots r),$$

mit  $n(\nu + 1)$  Variablen. Wir werden daher nicht verlangen, dass alle  $r$ -gliedrigen intransitiven Gruppen aufgestellt werden sollen, sondern werden uns darauf beschränken, alle intransitiven  $r$ -gliedrigen Gruppen  $X_1 f \dots X_r f$  in einer gegebenen Anzahl Variablen etwa  $x_1 \dots x_n$  aufzusuchen.

Unter den  $r$  Gleichungen  $X_k f = 0$  mögen sich gerade

$m < n$  unabhängige finden; dieselben haben dann  $n-m$  unabhängige Lösungen gemeinsam, und wir können uns die Variablen von vornherein so gewählt denken, dass eben  $x_{m+1} \dots x_n$  diese Lösungen sind. Unter dieser Voraussetzung hat die Gruppe die Form

$$X_k f = \sum_1^m \xi_{ki} (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

und es verschwinden sicher nicht alle Determinanten

$$\sum \pm \xi_{k_1 1} \dots \xi_{k_m m}$$

Ist  $r > m$ , so brauchen  $X_1 f \dots X_r f$ , aufgefasst als infinitesimale Transformationen in den Variablen  $x_1 \dots x_m$  allein, nicht von einander unabhängig zu sein; es können vielmehr Relationen von der Form

$$\sum_1^r \chi_k (x_{m+1}, \dots, x_n) X_k f = 0$$

bestehen. Daher wollen wir voraussetzen, dass  $X_1 f \dots X_s f (s \geq m)$  nicht durch eine solche Relation verknüpft sind, während dagegen immer

$$X_{s+\nu} f = \sum_1^s \mathcal{D}_{\nu j} (x_{m+1}, \dots, x_n) X_j f \quad (\nu = 1 \dots r-s)$$

ist. Betrachten wir jetzt  $x_{m+1}, \dots, x_n$  als Constanten und nur  $x_1 \dots x_m$  als Variablen, so stellen  $X_1 f \dots X_s f$  gerade  $s$  unabhängige infinitesimale Transformationen dar, welche offenbar eine  $s$ -gliedrige und zwar eine transitive Gruppe erzeugen.

Nach den Entwicklungen der vorigen Nummer können wir aber alle transitiven  $s$ -gliedrigen Gruppen in  $m$  Variablen bestimmen, nur müssen jetzt alle in diesen Gruppen etwa vorkommenden willkürlichen Constanten als willkürliche Functionen von  $x_{m+1}, \dots, x_n$  betrachtet werden.

Haben wir daher in den Variablen  $x_1 \dots x_m$  irgend  $s$  un-

abhängige infinitesimale Transformationen  $Z_1 f \dots Z_s f$ , die eine transitive Gruppe erzeugen, so setzen wir

$$X_k f = \sum_1^s \Psi_{kj} (x_{m+1} \dots x_n) Z_j f \quad (k = 1 \dots r),$$

wobei die  $s$ -gliedrigen Determinanten  $(\Psi_{kj})$  nicht sämmtlich verschwinden dürfen.

Die Functionen  $\Psi_{kj}$  und die etwaigen sonst in den  $Z_j f$  enthaltenen willkürlichen Constanten, die ebenfalls Functionen von  $x_{m+1} \dots x_n$  sind, bestimmen sich aus der Bedingung, dass Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \sum_1^r c_{ik\nu} X_\nu f$$

bestehen sollen. Man bemerke wohl, dass für die  $\Psi$  und die übrigen Functionen von  $x_{m+1} \dots x_n$  sich durchaus keine Differentialgleichungen, sondern einzig und allein endliche Relationen ergeben, so dass sich also die allgemeinsten Lösungen für diese unbekanntenen Functionen ohne Integration bestimmen.

*Theorem.* Hat man alle transitiven Gruppen in weniger als  $n$  Variablen und mit höchstens  $r$  Parametern gefunden, so erfordert die Bestimmung aller  $r$ -gliedrigen intransitiven Gruppen in  $n$  Variablen blos ausführbare Operationen.

## § 2.

### Systatische und asystatische Gruppen von Punkttransformationen.

In den Variablen  $x_1 \dots x_n \dots x_s$  sei eine  $r$ -gliedrige Gruppe  $X_1 f \dots X_n f \dots X_r f$  vorgelegt. Wir werden annehmen, dass  $X_{n+1} \dots X_r$  sich durch  $X_1 \dots X_n$  ausdrücken:

$$X_{n+k} = \varphi_{k1} (x_1 \dots x_s) X_1 + \dots + \varphi_{kr} X_r,$$

während  $X_1 \dots X_n$  keine lineare Relation

$$\varphi_1 X_1 + \dots + \varphi_n X_n = 0$$

erfüllen. Es liegt in der Natur der Sache, dass weder die Zahl  $s$  der Variablen  $x$  noch die Parameterzahl  $r$  der Gruppe kleiner als  $n$  sein kann. Unsere Gruppe enthält bekanntlich gerade  $\infty^{r-n}$  Transformationen, welche einen Punkt  $(x)$  von allgemeiner Lage invariant lassen. Diese Transformationen bilden eine  $(r-n)$ -gliedrige Untergruppe  $g_{r-n}$  und es gehört offenbar zu jedem Punkte  $(x)$  eine ganz bestimmte Untergruppe  $g_{r-n}$ . Schon bei verschiedenen Gelegenheiten haben wir dieser Untergruppen Erwähnung gethan; wir bemerkten insbesondere, dass die dem Punkte  $x_k^\circ$  zugehörige Gruppe  $g_{r-n}$  von allen infinitesimalen Transformationen  $\sum e_k X_k f$  erzeugt wird, deren Reihenentwicklungen nach der  $x_k - x_k^\circ$  kein Glied nullter sondern nur Glieder höherer als nullter Ordnung enthalten. Auf diese Bemerkung werden wir auch in diesem Paragraphen später zurückkommen.

4. Setzen wir zur Abkürzung

$$\varphi_{ki}(x_1^\circ \dots x_s^\circ) = \varphi_{ki}^\circ$$

so liefern die  $r-n$  Ausdrücke

$$X_{n+k} - \varphi_{k1}^\circ X_1 - \dots - \varphi_{kr}^\circ X_r$$

mit den Constanten  $\varphi_{ki}^\circ$  offenbar infinitesimale Transformationen unserer  $r$ -gliedrigen Gruppe, welche den Punkt  $x_k^\circ$  invariant lassen. Und da diese  $r-n$  inf. Transformationen unabhängig sind, indem sonst auch  $X_1 \dots X_r$  eine lineare Relation mit constanten Coefficienten erfüllen, so schliessen wir, dass der Ausdruck

$$\sum_k d_{n+k} (X_{n+k} - \varphi_{k1}^\circ X_1 - \dots - \varphi_{kn}^\circ X_n)$$

mit den  $r-n$  arbiträren Constanten  $d_{n+k}$  alle inf. Transformationen  $\sum e_k X_k f$  liefert, welche den Punkt  $x_k^\circ$  allgemeiner Lage invariant lassen. Wir kennen hiermit die dem Punkte  $x_k^\circ$  zugeordnete Gruppe  $g_{r-n}$ .

Lassen wir nun den Punkt  $x_k^\circ$  nach und nach verschiedene



Lagen  $\bar{x}_k$  annehmen, so bekommen wir eine ganze Schaar von Gruppen  $g_{r-n}$ . Es ist aber keineswegs sicher, dass es  $\infty^s$  verschiedene Gruppen  $g_{r-n}$  giebt, indem zu verschiedenen Punkten, ja sogar zu unendlich vielen Punkten, eine und dieselbe Gruppe  $g_{r-n}$  gehören kann.

Wir setzen

$$\varphi_{ki}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s) = \bar{\varphi}_{ki},$$

betrachten die dem Punkte  $\bar{x}_k$  zugehörige Untergruppe  $\bar{g}_{r-n}$ , deren infinitesimalen Transformationen

$$\sum \delta_{n+k} (X_{n+k} - \bar{\varphi}_{k_1} X_1 - \dots - \bar{\varphi}_{k_n} X_n)$$

die arbiträren Constanten  $\delta_{n+k}$  enthalten. Diese Untergruppe ist identisch mit der dem Punkte  $x_k^\circ$  zugehörigen Untergruppe, wenn es für beliebige Werthe der Constanten  $d_{n+k}$  immer möglich ist den Constanten  $\delta_{n+k}$  solche Werthe zu ertheilen, dass die Gleichung

$$\sum d_{n+k} (X_{n+k} - \varphi_{k_1}^\circ X_1 - \dots) = \sum \delta_{n+k} (X_{n+k} - \bar{\varphi}_{k_1} X_1 - \dots)$$

identisch besteht. Aber die Gleichung

$$\sum (d_{n+k} - \delta_{n+k}) X_{n+k} - (d_{n+k} \varphi_{k_1}^\circ - \delta_{n+k} \bar{\varphi}_{k_1}) X_1 - \dots = 0$$

zeigt, da  $X_1 \dots X_n \dots X_r$  unabhängige inf. Transformationen sind, dass die constanten Coefficienten

$$d_{n+k} - \delta_{n+k}, d_{n+k} \varphi_{k_1}^\circ - \delta_{n+k} \bar{\varphi}_{k_1}, \dots$$

sämmtlich verschwinden müssen. Daher sind die den Punkten  $x_k^\circ$  und  $\bar{x}_k$  zugehörigen  $(r-n)$ -gliedrigen Untergruppen identisch dann und nur dann, wenn

$$\varphi_{k_1}^\circ = \bar{\varphi}_{k_1}, \dots, \varphi_{k_n}^\circ = \bar{\varphi}_{k_n}$$

ist, wenn also die  $\varphi_{ki}$  Functionen von den  $x$  sind, welche bei der Substitution  $x_k = \bar{x}_k$  dieselben Zahlenwerthe wie bei der Substitution  $x_k = x_k^\circ$  erhalten.

Es ist nun insbesondere denkbar, dass *jeder* Punkt  $x_k^\circ$  in einer continuirlichen Mannichfaltigkeit von Punkten  $\overline{x_k}$  enthalten ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass zu jedem Punkte  $\overline{x_k}$  dieselbe Gruppe  $g_{r-n}$  wie zu dem Punkte  $x_k^\circ$  gehört. Dies tritt ein, wenn es eine continuirliche Anzahl Punkte  $\overline{x_k}$  giebt, für welche alle  $\varphi_{ki}$  dieselben Zahlenwerthe, wie für den Punkt  $x_k^\circ$  annehmen, wenn also die Gleichungen

$$\varphi_{ki}(\overline{x_1} \dots \overline{x_s}) = \varphi_{ki}^\circ$$

sich nicht hinsichtlich  $\overline{x_1} \dots \overline{x_s}$  auflösen lassen, anders ausgesprochen, wenn sich unten allen  $\varphi_{ki}$  nicht  $s$  unabhängige Funktionen von  $x_1 \dots x_s$  sondern nur  $\sigma$  etwa  $\varphi_1 \dots \varphi_\sigma$  finden lassen. Alsdann zerlegen die Gleichungen

$$\varphi_i = a_1 \dots, \varphi_\sigma = a_\sigma$$

mit den  $\sigma$  arbiträren Constanten  $a_1 \dots a_\sigma$  den Raum in  $\infty^{\sigma-s}$  Mannichfaltigkeiten. Wählen wir einen Punkt  $x_k^\circ$  in einer beliebigen unter diesen Mannichfaltigkeiten, so gehören zu allen übrigen Punkten  $\overline{x_k}$  derselben Mannichfaltigkeit dieselbe Untergruppe  $g_{r-n}$  wie zu dem Punkte  $x_k^\circ$ .

Zerlegt sich der Raum in der hiermit angegebenen Weise in Mannichfaltigkeiten, so ist es klar, dass jede Transformation  $\sum e_k X_k f$ , welche einen Punkt  $x_k^\circ$  einer solchen Mannichfaltigkeit invariant lässt, gleichzeitig alle übrigen Punkte  $\overline{x_k}$  derselben Mannichfaltigkeit invariant lässt.

Auf diese Weise haben wir eine wichtige Theilung aller Gruppen  $X_1 f \dots X_r f$  in zwei getrennte Classen gewonnen. In der einen Classe gehören die Gruppen von der Beschaffenheit, dass bei allen Transformationen, die einen Punkt allgemeiner Lage an seiner Stelle lassen, gleichzeitig jeder Punkt einer continuirlichen Mannichfaltigkeit invariant bleibt. Solche Gruppen nennen wir *systematische Gruppen*. In die zweite Classe gehören diejenigen Gruppen, bei welchen alle Transformationen, die einen Punkt allgemeiner Lage festhalten, nicht gleichzeitig

auch alle Punkte einer Mannichfaltigkeit einzeln stehen lassen. Solche Gruppen nennen wir *asystatische Gruppen*.

5. Schon in einem früheren Paragraphen fanden wir eine wichtige Eigenschaft der Funktionen  $\varphi_{ki}$ . Wir betrachteten nämlich ebenfalls eine  $r$ -gliedrige Gruppe  $X_1 \dots X_r$  in  $s$  Variablen  $x_1 \dots x_s$ . Indem wir auch damals voraussetzten, dass Relationen der Form

$$X_{n+k} = \varphi_{k1} X_1 + \dots + \varphi_{kn} X_n$$

dagegen keine der Form  $\varphi_1 X_1 + \dots + \varphi_n X_n = 0$  bestände, erkannten wir, dass jede Grösse  $X_j \varphi_\rho$  sich als Funktion von den unabhängigen  $\varphi_1 \dots \varphi_\sigma$  unter den  $\varphi_{ki}$  ausdrücken liesse:

$$X_j \varphi_\rho = \omega_{j\rho}(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_\sigma).$$

Ist daher  $\sigma < s$ , so ergibt sich, indem man  $\varphi_1 \dots \varphi_\sigma$  zusammen mit  $s - \sigma$  passenden weiteren Grössen  $z_{\sigma+1} \dots z_s$  als neue unabhängige Variablen einführt, dass unsere Gruppe imprimitiv ist, indem sie in den neuen Variablen die Form

$$X_k f = \sum_1^\sigma \omega_{k\mu}(\varphi_1 \dots \varphi_\sigma) \frac{\partial f}{\partial \varphi_\mu} + \sum \beta_{k\nu}(\varphi_1 \dots z \dots) \frac{\partial f}{\partial z_\nu}$$

annimmt. Hierin liegt der Satz

*Satz. Jede systatische Gruppe ist imprimitiv.*

Folglich ist jede primitive Gruppe asystatisch. Als Beispiel einer asystatischen Gruppe, die imprimitiv ist, möge die viergliedrige Gruppe

$$p_1, p_2, x_1 p_2, x_2 p_2$$

dienen. Sie ist imprimitiv; interpretieren wir nämlich  $x_1 x_2$  als Cartesische Coordinaten in einer Ebene, so bestimmt  $x_1 = \text{Const.}$  eine invariante Geradenschaar. Sie ist aber offenbar asystatisch, da Relationen der Form

$$x_1 p_2 = x_1 \cdot p_2 \quad x_2 p_2 = x_2 \cdot p_2$$

bestehen und  $x_1, x_2$  selbstverständlich unabhängig sind.

Haben wir eine systatische Gruppe, so werden die Mannichfaltigkeiten

$$\varphi_1 = a_1 \dots \quad \varphi_\sigma = a_\sigma$$

eben, weil die Gruppe imprimitiv ist, bei der Gruppe unter einander vertauscht. Es ist äusserst leicht diesen Satz, den wir durch analytische Betrachtungen gewonnen haben, durch reinbegriffliche Ueberlegungen herzuleiten, indem wir uns auf die Entwicklungen der vorigen Nummer stützen. Sei in der That  $X_0$  allgemeines Symbol derjenigen Transformationen der Gruppe  $X_k f$ , die den Punkt allgemeiner Lage  $x_k^\circ$  invariant lassen und es mögen mit  $p_0$  alle Punkte bezeichnet werden, welche gleichzeitig mit dem Punkte  $x_k^\circ$ , also bei allen Transformationen  $X_0$  fest bleiben. Alle Punkte  $p_0$  bilden eine Mannichfaltigkeit  $M_0$ , die selbstverständlich durch die Gl.  $\varphi_1 = a_1 \dots \varphi_\sigma = a_\sigma$  nach passender Wahl von den Constanten  $a_k$  bestimmt wird. Führen wir nun irgend eine beliebige aber bestimmte Transformation  $X$  der Gruppe  $X_k f$  aus, so erhalten alle Punkte  $p_0$  neue Lagen  $p_1$ , deren Inbegriff eine Mannichfaltigkeit  $M_1$  bildet. Wir haben nur zu zeigen, dass unsere Gruppe  $X_k f \infty^{r-n}$  Transformationen enthält, welche auf einmal alle Punkte  $p_1$  einzeln stehen lässt. Es ist aber klar, dass die  $\infty^{r-n}$  Transformationen  $X^{-1} X_0 X$  diese Forderung erfüllen. Auch die Mannichfaltigkeit  $M_1$  besitzt somit die Eigenschaft, dass ihre Punkte bei denselben  $\infty^{r-n}$  Transformationen der  $r$ -gl. Gruppe ihre Lage behalten.  $M_1$  wird daher wie  $M_0$  dargestellt durch die Gleichungen  $\varphi_1 = a_1 \dots \varphi_\sigma = a_\sigma$ , wenn nur die Constanten  $a_k$  passend gewählt werden. Da  $X$  eine beliebige Transformation unserer  $r$ -gliedrigen Gruppe darstellt, so ist hiermit auch rein begrifflich nachgewiesen, dass die Mannichfaltigkeiten  $\varphi_k = a_k$  bei der Gruppe  $X_k f$  unter einander vertauscht werden.

6. Der Begriff systatische und asystatische Gruppe steht in dem allergenauesten Zusammenhange mit der früher ent-

wickelten Theorie reziproker Gruppen. Dies soll jetzt gezeigt werden. Gleichzeitig illustrieren wir die Bedeutung dieser Begriffe, indem wir wiederum auf unsere früheren Untersuchungen über Ähnlichkeit zwischen Transformationsgruppen zurückkommen.

Haben die inf. Transformationen unserer Gruppe die Form

$$X_k f = \sum \xi_{ki} (x_1 \dots x_s) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und setzen wir wie früher

$$X_k' f = \sum \xi_{ki} (x_1' \dots x_s') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

so erhält jede  $X_k f$  selbstverständlich durch die Variablenänderung  $x_i' = x_i$  die Form  $X_k' f$ . Unter Umständen gibt es nun eine ganze Schaar von Variablenänderungen  $x' = \Pi(x_1 \dots x_s \dots)$ , welche ebenfalls jede  $X_k f$  auf die Form  $X_k' f$  bringen. Dies ist bekanntlich der Fall, wenn es eine oder mehrere inf. Transformationen  $Z f$  gibt, welche zu allen  $X_k f$  in der Beziehung  $(Z X_k) = 0$  stehen, d. h. wenn die Gruppe  $X_1 \dots X_r$  eine reziproke Gruppe  $Z_1 f \dots Z_\rho f$  besitzt. Auf der anderen Seite zeigen frühere Entwicklungen, dass diejenige Transformation  $x' = \Pi(x)$ , welche jede  $X_k f$  auf die Form  $X_k' f$  bringt, vollständig bestimmt ist [kein Parameter enthält] dann und nur dann, wenn es unter den  $\varphi_{ki}$  gerade  $s$  unabhängige gibt. Fassen wir diese bekannten Ergebnisse zusammen, und wenden dabei die in diesem Paragraphen eingeführte Terminologie an, so können wir den folgenden Satz aufstellen:

*Satz. Eine Gruppe  $X_1 f \dots X_r f$  ist asystatisch, wenn sie keine reziproke Gruppe besitzt, wenn es also keine inf. Transformation  $Z f$  gibt (innerhalb oder ausserhalb der Gruppe), welche mit allen  $X_k f$  vertauschbar ist.*

Da jede ausgezeichnete inf. Transformation einer Gruppe

mit allen inf. Transformationen derselben vertauschbar ist, erhalten wir ohne weiteres das

*Corollar 1.* Eine Gruppe  $X_{k}f$  mit einer oder mehreren ausgezeichneten inf. Transformationen ist systatisch.

Da die adjungirte Gruppe einer  $r$ -gliedrigen Gruppe ohne ausgezeichnete inf. Transformationen  $r$  wesentliche Parameter besitzt, erhalten wir überdies das Coroller:

*Corollar 2.* Die adjungirte Gruppe einer  $r$ -gliedrigen asystatischen Gruppe hat  $r$  wesentliche Parameter.

Weiss man, dass die Gruppe  $X_{1}f \dots X_{r}f$  durch passende Variablenwahl auf eine gewisse bekannte Form

$$Y_{k}f = \sum \eta_{ki} (y_1 \dots y_s) \frac{\partial f}{\partial y_s}$$

gebracht werden kann, und zwar in der Weise, dass jedes  $X_{k}f$  die Form  $Y_{k}f$  annimmt, so stellt sich die fundamentale Frage, ob die Auffindung von diesen Variablen  $y_k$  Quadraturen oder sogar Integration von Differentialgleichungen verlangt oder ob sie durch Auflösung von Gleichungen geleistet werden kann. Das letzte ist der Fall dann und nur dann, wenn es  $s$  unabhängige Funktionen  $\varphi_{ki}$  giebt, also wenn die Gruppe  $X_{k}f$  asystatisch ist. Ist dagegen die Gruppe  $X_{k}f$  systatisch, so enthält der allgemeinste Ausdruck der neuen Variablen  $y$  gewisse arbiträre Constanten, und daher verlangt die Bestimmung dieser Grössen mindestens Quadraturen und im Allgemeinen die Integration von Differentialgleichungen, deren Ordnung und Anzahl von der Zusammensetzung der zu  $X_{k}f$  reciproken Gruppe abhängt, wie im Werke über Differentialgleichungen näher nachgewiesen werden soll.)\*

Hier müssen wir uns darauf beschränken den folgenden wichtigen Satz zu notiren:

*Satz.* Weiss man, dass eine gegebene asystatische Gruppe  $X_{1}f \dots X_{r}f$  durch Einführung zweckmässiger Variablen  $y_k$  auf

\*) Math. Ann. Bd. XXV.

eine gewisse Form  $Y_1 f \dots Y_r f$  gebracht werden kann, so verlangt die Bestimmung von den neuen Variablen  $y_k$  nur die Auflösung von Gleichungen.

7. Kennt man die inf. Transformationen  $X_1 f \dots X_r f$  einer Gruppe, so ist es nach dem Vorangehenden leicht zu entscheiden, ob die Gruppe systatisch ist oder nicht. Es ist aber nicht uninteressant, dass man nicht einmal die  $X_k f$  zu kennen braucht. Es genügt von denjenigen Reihenentwickelungen der  $\sum_{k=1}^r X_k f$  in der Umgebung eines Punktes  $x_k^\circ$  allgemeiner Lage, die mit Gliedern erster Ordnung anfangen, eben diese Glieder erster Ordnung zu kennen. Zu diesem Resultat führt uns die folgende Betrachtung von den totalen Differentialgleichungen, deren Integrale die Grössen  $\varphi_{ki}$  sind.

Die  $\varphi_{ki}$  werden definirt durch die identischen Gleichungen

$$X_{n+k} = \varphi_{k1} X_1 + \dots + \varphi_{kn} X_n,$$

die sich in die folgenden Relationen zerlegen

$$(A) \quad \xi_{n+k,i} = \varphi_{k1} \xi_{1i} + \dots + \varphi_{kn} \xi_{ni}, \\ (i = 1, 2 \dots s)$$

welche Identitäten darstellen.

Geben wir andererseits in den  $\varphi_{ki}$  den  $x_k$  die speciellen Werthe  $x_k^\circ$  und setzen wie früher  $\varphi_{ki}(x_1^\circ \dots) = \varphi_{ki}^\circ$ , so sind bekanntlich

$$X_{n+k} - \varphi_{k1}^\circ X_1 - \dots - \varphi_{kn}^\circ X_n$$

die  $r-n$  unabhängigen inf. Transformationen der  $r$ -gliedrigen Gruppe, welche den Punkt  $x_k^\circ$  invariant lassen. Entwickeln wir daher diese Ausdrücke nach den  $x_k - x_k^\circ$ , so enthalten die  $r-n$  hervorgehenden Reihenentwickelungen kein Glied nullter Ordnung, sondern fangen mit Gliedern erster Ordnung an:

$$\sum_i \sum_j \left( \frac{d\xi_{n+k,i}}{dx_j} - \varphi_{k1}^\circ \frac{\partial \xi_{1i}}{\partial x_j} - \dots \right)_{x_\nu = x_\nu^\circ} (x_j - x_j^\circ) p_i + \dots \\ = \sum_i \sum_j \alpha_{kij} (x_j - x_j^\circ) p_i + \dots$$

Fragen wir nun nach *allen* inf. benachbarten Punkten  $x_j$ , welche wie der Punkt  $x_j^\circ$  sämmtliche diese  $r-n$  inf. Transformationen zulassen, so erhalten wir zu ihrer Bestimmung die Gleichungen

$$0 = \sum_j \left( \frac{d\xi_{n+k,i}}{dx_j} - \varphi_{k_i} \frac{\partial \xi_{1,i}}{\partial x_j} - \dots \right)_{x_\nu = x_\nu^\circ} (x_j - x_j^\circ)$$

Ersetzen wir daher die Incremente  $x_j - x_j^\circ$  durch die Differentialen  $dx_j^\circ$  und lassen hiernach den Index 0 weg, so erkennen wir, dass alle  $\varphi_{ki}$  Integrale von den Differentialgleichungen

$$(B) \quad d\xi_{n+k,i} - \varphi_{k_1} d\xi_{1,i} - \dots - \varphi_{k_n} d\xi_{n,i} = 0$$

sind. Dass diese Differentialgleichungen keine anderen Integrale als eben die  $\varphi_{ki}$  besitzen, ist an sich klar; man verificirt es übrigens leicht durch Differentiation von den Identitäten (A), welche zeigen, dass die gefundenen Differentialgleichungen die Form

$$d\varphi_{k_1} \xi_{1,i} + \dots + d\varphi_{k_n} \xi_{n,i} = 0$$

erhalten können; diese Form bringt in Evidenz nicht allein, dass die  $\varphi_{ki}$  Integrale sind, sondern zugleich, dass sie die einzigen Integrale sind. Zu bemerken ist übrigens, dass sich aus den totalen Differentialgleichungen (B) keine neue Gleichung zwischen den Differentialen  $dx$  durch Differentiation herleiten lässt; denn die von uns befolgte Methode zur Bestimmung von den zu  $x_k$  benachbarten Punkten  $x_k + dx_k$ , welche gleichzeitig mit  $x_k$  fest bleiben, giebt uns eben *alle* Relationen, welche die  $dx_k$  erfüllen. Giebt es daher mindestens ein Werthsystem  $dx_1 \dots dx_s$  ausser  $dx_k = 0$ , welches alle Differentialgleichungen (B) erfüllt, so ist unser Gruppe systatisch. Dies aber deckt sich damit: die Gruppe ist systatisch, wenn die Gleichungen

$$\sum_j \alpha_{kij} (x_j - x_j^\circ) = 0$$



durch mindestens ein Werthsystem  $x_j - x_j^\circ$  ausser  $x_j - x_j^\circ = 0$  erfüllt werden.

*Satz.* Weiss man von denjenigen Reihenentwickelungen nach den  $x_k - x_k^\circ$  der infinitesimalen Transformationen  $\sum_i X_i f$  einer Gruppe, welche mit Gliedern erster Ordnung anfangen, dass diese Glieder erster Ordnung die Form besitzen

$$\sum_i \sum_j \alpha_{kij} (x_j - x_j^\circ) p_i$$

$$(k = 1, 2 \dots r-n)$$

so entscheidet man, ob die Gruppe  $X_{kf}$  systatisch ist, indem man die linearen Gleichungen

$$\sum \alpha_{kij} (x_j - x_j^\circ) = 0$$

bildet. Giebt es mindestens ein nicht verschwindendes Werthsystem  $x_j - x_j^\circ$ , welches alle diese linearen Gleichungen erfüllt, so ist die Gruppe systatisch; sonst nicht.

### § 3.

**Allgemeine Methode zur Bestimmung aller Gruppen von Punkttransformationen einer  $n$ -fachen Mannichfaltigkeit.**

In dem nächstvorangehenden Paragraphen zeigten wir in grossen Zügen, wie man alle Gruppen von Punkttransformationen des Raumes  $x_1 \dots x_n$ , welche eine gegebene Zahl etwa  $r$  Parameter besitzen, durch ausführbare Operationen bestimmen kann. Es giebt nun, wie gross auch  $r$  sein mag, immer Gruppen mit  $r$  Parametern; wählt man nämlich z. B.  $r$  verschiedene Funktionen von  $x_1$  etwa  $f_1(x_1) \dots f_r(x_1)$ , die keine lineare Relation  $\sum c_k f_k = 0$  erfüllen, so sind

$$f_1(x_1) p_2, f_2(x_1) p_2 \dots f_r(x_1) p_2$$

unabhängige inf. Transformationen einer  $r$ -gliedrigen Gruppe. Hieraus folgt, dass man keineswegs sagen kann, dass die Entwickelungen des citirten Paragraphen die Bestimmung

aller endlichen Gruppen von Punkttransformationen einer  $n$ -fachen Mannichfaltigkeit auf ausführbare Operationen reduciren; denn eine *unbegrenzte* Anzahl ausführbarer Operationen ist nicht mehr eine ausführbare Operation.

Ungeachtet der wichtigen Ergebnisse des ersten Paragraphen harrt daher das Problem: »alle endlichen Gruppen von Punkttransformationen einer  $n$ -fachen Mannichfaltigkeit zu bestimmen«, noch ihrer Erledigung. In diesem Paragraphen zerlegen wir dieses allgemeine Problem in eine grosse Anzahl von Unterproblemen und geben gleichzeitig für jedes  $n$  eine rationelle Classification von allen zugehörigen transitiven Gruppen. Schon früher gaben wir die allgemeine Erledigung des gestellten Problems für die Fälle  $n = 1$ ,  $n = 2$  und im Wesentlichen auch für  $n = 3$ .

8. Zunächst müssen wir, um die Grundlage für die angekündigten Entwicklungen zu gewinnen, einige allgemeine Betrachtungen vorausschicken, wobei wir uns u. A. auf die allgemeine Theorie der Erweiterung einer Gruppe stützen.

Sei

$$X_k f = \sum \xi_{ki} (x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1 \dots r)$$

eine ganz beliebige  $r$ -gliedrige Gruppe. Betrachten wir wie früher  $x_1 \dots x_n$  als Funktionen einer Hilfsvariablen  $t$ , welche durch die Gruppe nicht transformirt wird, und setzen wie damals

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j', \quad \sum \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_j} x_j' = \xi_{ki}',$$

so sind die Ausdrücke

$$\bar{X}_k f = \sum \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \xi_{ki}' \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

die inf. Transformationen einer erweiterten Gruppe. Uebertragen wir die im dreifachen Raume gebräuchliche Termi-

nologie auf unseren  $n$ -fachen Raum, so können wir die  $2n$  Grössen  $x_k, x'_k$  als Bestimmungsstücke eines *Linielements* betrachten. Denken wir uns insbesondere die  $x_k$  als gegeben, die  $x'_k$  als variabel, so liefert jedes Werthsystem  $x'_k$  ein durch den festen Punkt  $x_k$  gehendes Linielement. Die erweiterte Gruppe  $X_k f$  transformirt, können wir sagen, alle Linielemente des Raumes.

Der Inbegriff von allen inf. Transformationen  $\Sigma e_k X_k f$ , welche einen vorgelegten Punkt  $x_k^\circ$  allgemeiner Lage invariant lassen, bilden eine Untergruppe mit höchstens  $r-1$  und mindestens  $r-n$  unabhängigen inf. Transformationen, als deren Symbol wir  $X_k^\circ$  einführen. Denken wir uns die  $X_k f$  wie alle  $\Sigma e_k X_k f$  nach den Potenzen von den  $x_i - x_i^\circ$  entwickelt, so sind die  $X_k^\circ$  bekanntlich dadurch charakterisirt, dass ihre Reihenentwickelungen kein Glied nullter Ordnung enthalten, sondern mit Gliedern erster oder höherer Ordnung anfangen:

$$X_k^\circ f = \Sigma a_{kij} (x_i - x_i^\circ) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dots$$

Auch zu dieser Gruppe bilden wir die erweiterte

$$\bar{X}_k^\circ f = \Sigma a_{kij} (x_i - x_i^\circ) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \dots + \Sigma a_{kij} x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_j} + \dots,$$

welche den Punkt  $x_i = x_i^\circ$  invariant lässt, und dabei alle durch diesen festen Punkt gehenden Linielemente  $x'$  transformirt. Wollen wir nur diese Linielemente in's Auge fassen und wie sie transformirt werden, studiren, während uns die Transformation aller anderen Linielemente gleichgültig ist, so machen wir in den  $\bar{X}_k^\circ f$  die Substitution  $x_i = x_i^\circ$  und erhalten so die lineare Gruppe

$$\Sigma a_{kij} x'_i \frac{\partial f}{\partial x'_j}, \tag{A}$$

welche die durch den festen Punkt  $x_k$  gehenden Linielemente geradeso transformirt wie die Gruppe  $\bar{X}_k^\circ f$  selbst.

Diese lineare homogene Gruppe wird nun zunächst Gegenstand unserer Betrachtungen sein. Zuerst werden wir ihr Verhalten bei Einführung neuer Variablen  $y_k$  statt der  $x_k$  untersuchen.

Seien die  $y_k$  gegebene unabhängige Funktionen von den  $x$ , die als Reihenentwickelungen nach den  $x - x^\circ$  vorgelegt sind:

$$y_k - y_k^\circ = \sum \alpha_{ki} (x_i - x_i^\circ) + \dots$$

und dabei für  $x_i = x_i^\circ$  die Werthe  $y_k^\circ$  enthalten. Durch Differentiation nach  $t$  erhalten wir auch für die  $y_k'$  Reihenentwickelungen nach den  $x_j - x_j^\circ$

$$y_k' = \sum_i (\alpha_{ki} + \dots) x_i'.$$

In den neuen Variablen  $y y'$  erhalten die  $\bar{X}_k^\circ f$  neue Formen

$$\bar{Y}_k^\circ f = \sum [b_{kij}(y_i - y_i^\circ) + \dots] \frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum (b_{kij} + \dots) y_i' \frac{\partial f}{\partial y_j'}$$

deren niedrigste Glieder

$$\sum b_{kij} (y_i - y_i^\circ) \frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum b_{kij} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_j'}$$

erhalten werden, wenn in die inf. Transformationen

$$\sum a_{kij} (x_i - x_i^\circ) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum a_{kij} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_j'}$$

die in den  $x - x^\circ$  und  $x'$  linear sind, die neuen Variablen

$$y_k - y_k^\circ = \sum \alpha_{ki} (x_i - x_i^\circ), \quad y_k' = \sum \alpha_{ki} x_i'$$

eingeführt werden. Hierin liegt, dass die zu der Gruppe  $\bar{Y}_k^\circ f$  gehörige lineare Gruppe

$$\sum b_{kij} y_i' \frac{\partial f}{\partial y_j'}$$

aus der linearen Gruppe

$$\sum a_{kij} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_j'}$$

durch die lineare Variabeländerung  $y_k' = \sum a_{ki} x_i'$  hervorgeht.

Bei Einführung der neuen Variablen  $y_k$  wird daher der Uebergang von der linearen Gruppe (A) zu der neuen linearen Gruppe durch eine lineare homogene Variabeländerung vermittelt.

Insbesondere werden wir annehmen, dass die Transformation  $y_k - y_k^\circ = \sum a_{ki} (x_i - x_i^\circ) + \dots$  der Gruppe  $X_{kf}$ , dagegen nicht der Gruppe  $X_k^\circ f$ , angehört. Alsdann sind die  $b_{kij}$  dieselben Funktionen von den  $y^\circ$  wie die  $a_{kij} = a_{kij}(x_1^\circ \dots x_n^\circ)$  von den  $x^\circ$ .

Ertheilt man daher in der linearen Gruppe

$$(A) \quad \sum a_{kij} (x_1^\circ \dots x_n^\circ) \cdot x_i' \frac{\partial f}{\partial x_j'}$$

den  $x_k^\circ$  successiv verschiedene Werthe, indem man nur berücksichtigt, dass die zugehörigen Punkte  $x_k^\circ$  vermöge der Gruppe  $X_{kf}$  in einander übergeführt werden können, so sind alle hiermit hervorgehenden linearen homogenen Gruppen (A) gleichberechtigt innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in den  $x'$ .

Ist insbesondere die Gruppe  $X_{kf}$  transitiv, und wird in Folge dessen der Punkt  $x_k^\circ$  durch diese Gruppe in jeden anderen Punkt übergeführt, so sind die zwei beliebigen Punkten  $x_k^\circ$  entsprechenden linearen Gruppen (A) immer innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt.

*Satz.* Ist eine transitive Gruppe  $X_{kf}$  vorgelegt, so sind für alle Punkte des Raumes die zugeordneten linearen Gruppen, welche die durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linien-elemente transformiren, innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt.

Jetzt können wir unser Classificationsprincip aller transitiven Gruppen formuliren. Wir betrachten alle transitiven Gruppen  $X_{kf}$ , deren zugehörigen linearen Gruppen (A) innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt sind, als bildend eine *Classe* Gruppen von Punkttransformationen. Es ist dabei wohl zu bemerken, dass zwei transitive Gruppen  $X_{kf}$ , welche derselben Classe zugehören, keineswegs dieselbe Parameterzahl zu haben brauchen. Sie haben allerdings beide in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage gleichviele und zwar  $n$  inf. Transformationen nullter Ordnung, und ebenfalls gleichviele etwa  $m$  inf. Transformationen erster Ordnung; dagegen kann die Zahl der inf. Transformationen zweiter und höherer Ordnung für beide Gruppen verschieden sein.

9. Aus dem Vorangehenden fließt nun die folgende rationelle Methode zur Bestimmung von allen transitiven Gruppen von Punkttransformationen  $X_{kf}$  einer  $n$ -fachen Mannichfaltigkeit  $x_1 \dots x_n$ .

Zuerst bestimmt man alle linearen homogenen Gruppen in  $x_1 \dots x_n$ , indem man alle innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigten als identisch auffasst. Für jede solche Schaar von gleichberechtigten linearen Gruppen wählen wir eine als Typus.

Zu jeder solchen Typus

$$\sum a_{kij} x_i p_j$$

entspricht, wie wir sehen werden, mindestens eine transitive Gruppe, deren zugehörige lineare Gruppe (A) derselben Typus angehört.

Wir suchen alle Gruppen  $X_{kf}$ , unter deren inf. Transformationen es in der Umgebung eines Punktes  $x_k = 0$  allgemeiner Lage  $n$  von nullter Ordnung giebt,

$$p_1 + \dots = P_1, \dots p_n + \dots = P_n;$$

ferner eine gewisse Anzahl von erster Ordnung:

$$T_k^{(1)} \sum (a_{kij} x_i + \dots) p_j$$

u. s. w.

Eine solche Gruppe können wir ohne weiteres gleich angeben, nämlich

$$p_1, \dots, p_n, \sum a_{kij} x_i p_j.$$

Um aber alle zu finden, müssen wir zunächst versuchen die möglichen Formen von den niedrigsten Gliedern in den inf. Transformationen zweiter und höherer Ordnung zu bestimmen. Soll die Gruppe die inf. Transformation zweiter Ordnung

$$T^{(2)} = \sum b_{ikj} x_i x_k p_j + \dots$$

enthalten, so muss die durch Combination entstandene inf. Transformation erster Ordnung

$$(p_\rho + \dots, \sum b x_i x_k p_j + \dots)$$

der Gruppe angehören und also ihre Glieder erster Ordnung sich aus den Gliedern erster Ordnung der Transformationen  $T^{(1)}$  linear zusammensetzen. Dies giebt eine Anzahl Relationen zur Bestimmung von den inf. Transformationen zweiter Ordnung. Man kann hiernach weiter gehen und versuchen, die möglichen Formen der inf. Transformationen dritter und höherer Ordnung zu bestimmen. Hierauf gehen wir indessen hier nicht näher ein, sondern vorbehalten uns, in späteren Paragraphen zu zeigen, dass diese Bestimmung in vielen Fällen sich recht einfach gestaltet.

Hat man in dieser Weise neben den inf. Transformationen nullter Ordnung  $P_k$ , den inf. Transformationen erster Ordnung  $T^{(1)}$ , noch gewisse zweiter Ordnung  $T^{(2)}$ , gewisse dritter Ordnung u. s. w. und endlich gewisse  $s$ -ter Ordnung  $T^{(s)}$  gefunden, während es keine von  $(s + )$ -ter Ordnung giebt, so müssen wir

alle diese inf. Transformationen paarweise combiniren und wissen dabei, dass immer Relationen der Form

$$(X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s$$

bestehen. In allen Fällen kann man nun *a priori* etwas über die Werthe der  $c_{iks}$  sagen. Ist nämlich  $X_i$  von  $i$ -ter,  $X_k$  von  $k$ -ter Ordnung, so ist  $(X_i X_k)$  mindestens von  $(i + k - 1)$ -ter Ordnung. Ist insbesondere  $i + k - 1 > s$ , so muss offenbar  $(X_i X_k)$  verschwinden.

Zur näheren Bestimmung von den  $c_{iks}$  bilden wir auf alle möglichen Weisen mit je drei  $X$  die Jacobische Identität, und erhalten hierdurch eine grosse Anzahl Relationen zwischen den  $c_{iks}$ . Im Allgemeinen werden hierdurch doch nicht alle  $c_{iks}$  bestimmt. Man hat aber ein naheliegendes Mittel zur wesentlichen Vereinfachung von den noch zurückgebliebenen  $c_{iks}$ . Statt  $P_\rho$  kann man als neue  $P_\rho$  einen Ausdruck von der Form

$$P_\rho + \sum c_k' T_k^{(1)} + \sum c_k^{(2)} T_k^{(2)} + \dots$$

mit den unbestimmten constanten Coefficienten  $c_k^{(1)}$ ,  $c_k^{(2)}$  ... einführen. Ebenfalls kann man statt jeder  $T_\rho^{(1)}$  die inf. Transformation

$$T_\rho^{(1)} + \sum d_k^{(2)} T_k^{(2)} + \dots$$

einführen u. s. v. Auf diese Weise erhält man eine grosse Anzahl Constanten zur Verfügung. Man disponirt über sie in solcher Weise, dass die  $c_{iks}$  möglichst einfache Werthe erhalten. In vielen Fällen lässt es sich sogar erreichen, dass alle  $c_{iks}$  gleich Null oder 1 werden.

Wir nehmen an, dass auf diese Weise alle möglichen Werthe von den  $c_{iks}$  gefunden sind. Es steht dann zurück, durch eine Integration die entsprechenden Gruppen zu bestimmen. In vielen Fällen wird diese Integration dadurch wesentlich vereinfacht, dass, wie wir wissen, alle Gruppen,



welche denselben Werthen von den  $c_{iks}$  entsprechen, *ähnlich* sind, worin liegt, dass es genügt, eine einzige Gruppe zu finden, welche die gestellten Forderungen erfüllt.

§ 4.

**Gruppen, die eine Differentialgleichung zweiten Grades**

$$\sum f_{ik} (x_1 \dots x_n) dx_i dx_k = 0 \text{ invariant lassen.}$$

Unsere Classification aller transitiven Gruppen von Punkttransformationen beruht auf der Betrachtung von der linearen Gruppe

$$\sum a_{kij} x_i' \frac{\partial f}{\partial x_j'}, \tag{A}$$

vermöge deren alle Linieelemente  $x_j'$  durch einen festgehaltenen Punkt  $x_p$  allgemeiner Lage transformirt werden. Schon früher haben wir die Fälle erledigt, in denen diese lineare Gruppe die allgemeine lineare  $x_i' p_k'$ , oder die specielle lineare homogene Gruppe  $x_i' p_i' - x_k' p_k'$  ist; in beiden diesen Fällen werden die Linieelemente  $x_j'$  in so allgemeiner Weise wie überhaupt möglich transformirt, indem die Transformation  $\sum x' p'$  alle Linieelemente stehen lässt.

10. Jetzt betrachten wir Gruppe  $X_{kf}$ , deren zugehörige lineare Gruppe (A) eine Gleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante

$$\sum f_{\mu\nu} (x_1 \dots x_n) x_\mu' x_\nu' = 0$$

invariant lässt, und können dabei ohne Beschränkung annehmen, dass diese Gleichung zweiten Grades bei der Substitution  $x_k = 0$  eine bequeme einfache Form, z. B. die Form

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2 = 0$$

erhält. Die allgemeinste lineare homogene Gruppe, welche

die Gleichung  $\sum x_i'^2 = 0$  invariant lässt, besteht aus allen Transformationen

$$x_i' p_k' - x_k' p_i', \sum x_k' p_k'.$$

Wir suchen alle Gruppen  $X_k f$ , deren zugehörige lineare Gruppe (A) entweder alle soeben aufgestellten Transformationen oder auch alle von der Form  $x_i' p_k' - x_k' p_i'$  umfasst.

Wir stellen uns also hier eigentlich zwei verschiedene Probleme, indem wir alle Gruppen  $X_k f$  suchen, deren zugehörige lineare Gruppe (A) zwei vorgelegte Formen besitzt. Diese beiden Probleme sind indessen genau mit einander verwandt; die durch einen festgehaltenen Punkt  $x_\rho$  gehenden Linienelemente  $x_i'$  werden nämlich in beiden Fällen in genau derselben Weise transformirt, indem die Transformation  $\sum x_j' p_j'$  alle Linienelemente  $x_j'$  stehen lässt.

Da die gesuchte Gruppe  $X_k f$  transitiv ist, so hat sie in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage, etwa des Punktes  $x_k = 0$ , sicher  $n$  inf. Transformationen nullter Ordnung

$$p_1 + \dots = P_1, \dots \quad p_n + \dots = P_n,$$

ferner jedenfalls  $\frac{n(n-1)}{1, 2}$  inf. Transformationen erster Ordnung, nämlich alle von der Form

$$x_i p_k - x_k p_i + \dots = S_{ik}$$

und möglicherweise noch eine hinzutretende Transformation erster Ordnung, nemlich

$$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n + \dots = U$$

Welche inf. Transformationen zweiter und höherer Ordnung vorkommen können, muss jetzt untersucht werden.

Sei

$$\sum b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu p_j + \dots$$

eine inf. Transformation zweiter Ordnung der gesuchten

Gruppe; dabei können wir annehmen, dass der Coefficient  $b_{j\nu}$  bei Vertauschung der Indices  $i$  und  $\nu$  ungeändert bleibt, dass also

$$b_{j\nu} = b_{\nu j} \tag{C}$$

ist. Durch Combination mit  $p_k + \dots$  und Division mit 2 erhalten wir eine in unserer Gruppe enthaltene inf. Transformation erster Ordnung

$$\sum_1^n \sum_1^n b_{jik} x_i p_j + \dots,$$

die sich offenbar aus den vorhandenen inf. Transformationen erster Ordnung, nämlich den  $S_{ik}$  und möglicherweise  $U$  linear zusammensetzen muss. Dies giebt nun zunächst die Relation

$$b_{jjk} = b_{kkk}, \tag{D}$$

welche zeigt, dass die Coefficienten  $b_{jjk}$  von  $j$  unabhängig sind, wobei noch zu bemerken ist, dass die  $b_{jjk}$  nur, wenn eine Transformation  $U$  vorkommt, von Null verschieden sein können; man erhält ferner für den Fall, dass die Indices  $j$  und  $i$  verschieden sind, die Relation

$$b_{jik} = - b_{ijk} \quad (j > i) \tag{E}$$

und mit Berücksichtigung von (C), wenn  $j$  und  $k$  verschieden sind, die äquivalente Relation

$$b_{jik} = b_{jki} = - b_{kji} = - b_{kij} \tag{F}$$

Sind andererseits  $i, k$  und  $j$  alle drei verschieden, so wird

$$b_{jik} = - b_{ijk} = - b_{ikj} = b_{kij}$$

und wegen (F)

$$- b_{kij} = b_{kij} = 0.$$

Die einzigen Coefficienten, die von Null verschieden sein

können, sind daher diejenigen, unter deren drei Indices zwei übereinstimmen, also die folgenden:

$$b_{jii}, b_{jji}, b_{jij}.$$

Dabei ist, wissen wir,  $b_{jij} = b_{jji}$  und, wenn  $i$  von  $j$  verschieden ist:

$$b_{jii} = -b_{jji} = -b_{ijj} = -b_{jjj}$$

Diese letzte Gleichung drückt alle nicht verschwindenden Coefficienten durch die  $b_{jjj}$  aus, und da, wenn keine Transformation  $U$  vorkommt, alle  $b_{jjj}$  gleich Null sind, so ergibt sich, dass inf. Transformationen zweiter Ordnung nur, wenn eine  $U$  vorkommt, auftreten können und in diesem Falle die Form

$$\sum_1^n b_{jjj} (2x_j \sum_1^n x_k p_k - p_j \sum_1^n x_\nu^2) = \sum b_{jjj} V_j$$

besitzen. Dabei ist es leicht zu erkennen, dass die  $b_{jjj}$  *arbiträre* Constanten sind, dass also jede Gruppe der verlangten Beschaffenheit, die überhaupt inf. Transformationen zweiter Ordnung besitzt, deren  $n$  nämlich  $V_1, V_2 \dots V_n$  enthält. Durch Combination ergibt sich nämlich, wenn  $\mu, \nu$  und  $\alpha$  drei verschiedene Indices sind

$$(S_{\mu\nu}, \sum b_{jjj} V_j) = b_{\nu\nu\nu} V_\mu - b_{\mu\mu\mu} V_\nu$$

$$(S_{\alpha\nu}, b_{\nu\nu\nu} V_\mu - b_{\mu\mu\mu} V_\nu) = -b_{\mu\mu\mu} V_\alpha;$$

sehen wir daher, wie im Folgenden geschehen soll, von dem Falle  $n = 2$  ab, so leuchtet die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar ein.

Wir fragen sodann nach den möglicherweise auftretenden inf. Transformationen dritter Ordnung. Ist  $Lf + \dots$  eine solche, und  $Lf$  Symbol der Glieder dritter Ordnung, so ergibt sich durch Combination von  $Lf$  mit  $p_j$  eine Relation

der Form

$$\frac{\partial Lf}{\partial x_j} = \sum_k c_{jk} (2x_k \sum_i x_i p_i - p_k \sum x^2)$$

und durch Differentiation dieser Gleichung nach  $x_\nu$  folgt

$$\frac{\partial^2 Lf}{\partial x_j \partial x_\nu} = \sum_k c_{jk} (2x_k p_\nu - 2x_\nu p_k) + 2c_{j\nu} \sum x_k p_k$$

Sind nun  $j$ ,  $\nu$  und  $k$  drei verschiedene Indices, so bleibt der Coefficient rechts von  $p_k$ , nämlich

$$- 2c_{jk} x_\nu + 2c_{j\nu} x_k,$$

ungeändert, wenn  $j$  und  $\nu$  vertauscht werden:

$$- 2c_{jk} x_\nu + 2c_{j\nu} x_k = - 2c_{\nu k} x_j + 2c_{\nu j} x_k;$$

also verschwinden alle  $c_{\tau\rho}$  mit zwei verschiedenen Indices. Ist dagegen  $k = \nu > j$ , so kommt durch eine analoge Ueberlegung

$$2c_{j\nu} x_\nu = - 2c_{\nu\nu} x_j + 2c_{\nu j} x_\nu$$

so dass auch alle  $c_{\nu\nu}$  gleich Null sind.

Es giebt daher keine inf. Transformation dritter oder höherer Ordnung.

Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

*Satz.* Enthält eine transitive Gruppe  $n + \frac{n(n-1)}{1, 2}$  infinitesimale Transformationen, deren Reihenentwickelungen in der Umgebung des Punktes allgemeiner Lage  $x_k = 0$  die Form besitzen:

$$p_1 + \dots, \dots p_n + \dots, x_i p_k - x_k p_i + \dots$$

und keine weitere Transformation von erster Ordnung, so giebt es gar keine von zweiter oder höherer Ordnung. Giebt es dagegen ausser den schon besprochenen inf. Transformationen

noch eine einzige von erster Ordnung, welche dann die Form  $\sum x_k p_k + \dots$  besitzt, so sind zwei Fälle möglich. Entweder giebt es gar keine weitere inf. Transformation in der Gruppe, oder aber giebe es gerade  $n$  weitere, deren Reihenentwickelungen in der Umgebung von  $x_k = 0$  die Form besitzen:

$$2x_i \sum x_k p_k - p_i \sum x_k^2 + \dots$$

Es giebt hiernach drei verschiedene Fälle, welche wir jetzt successiv erledigen werden.

11. Zuerst suchen wir alle transitiven Gruppen von Punkttransformationen mit  $n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1$  inf. Transformationen, deren Reihenentwickelungen in der Umgebung des Punktes allgemeiner Lage die Form besitzen

$$p_k + \dots = P_k, \quad x_i p_k - x_k p_i + \dots = S_{ik}, \quad \sum x_k p_k + \dots = U.$$

Die  $S_{ik}$  und  $U$  sind offenbar verknüpft durch die Relationen

$$(S_{ik} U) = 0 \\ (S_{ik}, S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{i\nu} - \varepsilon_{i\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{i\mu} + \varepsilon_{i\nu} S_{k\mu},$$

wo  $\varepsilon_{\pi\rho}$  für  $\pi = \rho$  den Werth 1 und in allen übrigen Fällen den Werth Null besitzt.

Ehe wir jetzt weiter gehen, normiren wir die  $P_k$  in zweckmässiger Weise. Ist nämlich

$$(P_k U) = P_k + \sum \alpha_{ik} S_{ik} + \alpha U,$$

so führen wir, wie erlaubt, die rechte Seite als neue  $P_k$  ein und erhalten hierdurch die einfachen Formeln

$$(P_k U) = P_k.$$

Um hiernach die Formeln

$$(P_k S_{\alpha\beta}) = \varepsilon_{k\alpha} P_\beta - \varepsilon_{k\beta} P_\alpha + \sum \lambda_{ij} S_{ij} + \lambda U$$

näher zu bestimmen, bilden wir die Identität

$$((P_k U) S_{\alpha\beta}) + ((U S_{\alpha\beta}) P_k) + ((S_{\alpha\beta} P_k) U) = 0,$$

welche giebt

$$(P_k S_{\alpha\beta}) = \varepsilon_{k\alpha} P_\beta - \varepsilon_{k\beta} P_\alpha.$$

Es bleibt übrig alle

$$(P_i P_k) = \sum \alpha_\nu P_\nu + \sum \beta_{\mu\nu} S_{\mu\nu} + \beta U$$

zu bestimmen; hierzu bilden wir die Identität

$$((P_i P_k) U) + ((P_k U) P_i) + ((U P_i) P_k) = 0$$

oder

$$((P_i P_k) U) - 2 (P_i P_k) = 0,$$

welche unmittelbar zeigt, dass alle  $(P_i P_k)$  gleich Null sind.

Unsere  $\frac{n^2+n+2}{2}$  inf. Transformationen,  $P_k, S_{ik}, U$  sind daher verknüpft durch die einfachen Relationen

$$(P_i P_k) = 0, (P_k U) = P_k, (P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu$$

$$(S_{ik} U) = 0, (S_{ik} S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{i\nu} - \varepsilon_{i\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{i\mu} + \varepsilon_{i\nu} S_{k\mu}$$

also genau durch dieselben Relationen wie die infinitesimalen Transformationen der Gruppe:

$$p_k, x_i p_k - x_k p_i, \sum x_k p_k.$$

*Alle Gruppen, welche wir in dieser Nummer suchen, sind daher holodrisch isomorph und gleichzeitig ähnlich mit der Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen des Euclidischen Raumes  $x_1 \dots x_n$ .*

12. Wir kommen zu dem zweiten Falle; wir suchen also alle transitiven Gruppen mit  $n + \frac{n(n-1)}{1, 2} + 1 + n$  inf. Transformationen, deren Reihenentwickelungen in der Umgebung des Punktes allgemeiner Lage  $x_k = 0$  die Form besitzen

$$p_k + \dots = P_k, x_i p_k - x_k p_i + \dots = S_{ik}, \sum x_k p_k + \dots = U$$

$$2 x_k \sum x_i p_i - p_k \sum x_i^2 = V_k,$$

wo die Indices  $k$  und  $i$  alle Werthe 1 bis  $n$  durchlaufen.

Die  $V_j$  sind, wie man ohne weiteres erkennt, mit einander

wie auch mit den  $S_{ik}$  und  $U$  durch die folgenden Relationen verknüpft:

$$\begin{aligned} (V_i V_k) &= 0, \quad (U V_k) = V_k, \\ (S_{ik} V_j) &= \varepsilon_{kj} V_i - \varepsilon_{ij} V_k. \end{aligned}$$

Es bestehen ferner Relationen der Form

$$(U S_{ik}) = \alpha_{ik_1} V_1 + \dots + \alpha_{ikn} V_n,$$

welche durch Einführung von  $S_{ik} - \alpha_{ik_1} V_1 - \dots - \alpha_{ikn} V_n$  als neue  $S_{ik}$  die einfache Gestalt

$$(U S_{ik}) = 0 \tag{G}$$

erhalten. Hiermit sind die  $S_{ik}$  vollständig normirt.

Es bestehen Relationen der Form

$$(S_{ik} S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{i\nu} - \varepsilon_{i\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{i\mu} + \varepsilon_{i\nu} S_{k\mu} + \sum \beta_\rho V_\rho;$$

durch Bildung der Jacobischen Identität

$$((S_{ik} S_{\mu\nu}) U) + ((S_{\mu\nu} U) S_{ik}) + ((U S_{ik}) S_{\mu\nu}) = 0,$$

deren beiden letzten Glieder wegen (G) ohne weiter wegfallen, ergibt sich, dass alle  $\beta_\rho$  gleich Null sind, dass also

$$(S_{ik} S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{i\nu} - \varepsilon_{i\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{i\mu} + \varepsilon_{i\nu} S_{k\mu}.$$

Jetzt müssen wir die  $P_k$  in solcher Weise normiren, dass die noch übrigen Relationen eine möglichst einfache Form erhalten. Ist

$$(P_k U) = P_k + \sum \alpha_{i\nu} S_{i\nu} + \alpha U + \sum \beta_i V_i$$

so führen wir

$$P_k + \sum \alpha_{i\nu} S_{i\nu} + \alpha U + \frac{1}{2} \sum \beta_i V_i$$

als neue  $P_k$  ein; dann wird

$$(P_k U) = P_k.$$

Hiernach bilden wir die Identität

$$((P_k S_{\mu\nu}) U) + ((S_{\mu\nu} U) P_k) + ((U P_k) S_{\mu\nu}) = 0$$



die sich auf

$$((P_k S_{\mu\nu}) U) - (P_k S_{\mu\nu}) = 0$$

reducirt und erhalten hierdurch die Formel

$$(P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu.$$

Dementsprechend giebt die Identität

$$((P_k V_j) U) - (V_j P_k) - (P_k V_j) = 0,$$

deren beiden letzten Glieder sich aufheben, die Formel

$$(P_k V_j) = 2 \varepsilon_{kj} U + 2 S_{jk}.$$

Endlich zeigt die Identität

$$((P_i P_k) U) + (P_k P_i) - (P_i P_k) = 0$$

dass alle  $(P_i P_k) = 0$  sind.

Unsere  $n + \frac{n(n-1)}{1,2} + 1 + n$  inf. Transformationen  $P_k, S_{ik}, U, V_j$  sind daher verknüpft durch die Relationen

$$\begin{aligned} (P_i P_k) &= 0, (P_k U) = P_k, (P_k S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} P_\nu - \varepsilon_{k\nu} P_\mu \\ (S_{ik} U) &= 0 (S_{ik} S_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} S_{i\nu} - \varepsilon_{i\mu} S_{k\nu} - \varepsilon_{k\nu} S_{i\mu} + \varepsilon_{i\nu} S_{k\mu}; \\ (P_k V_j) &= 2 \varepsilon_{kj} U + 2 S_{jk}, (U V_k) = V_k, \\ (V_i V_k) &= 0, (S_{ik} V_j) = \varepsilon_{kj} V_i - \varepsilon_{ij} V_k. \end{aligned}$$

Unsere Gruppe ist daher, wie man ohne weiter übersieht, isomorph mit der Gruppe

$$(C) \quad p_k, x_i p_k - x_k p_i, \sum x_k p_k, 2x_j \sum x_k p_k - p_j \sum x_i^2$$

und nach früheren allgemeinen Entwicklungen ist sie mit ihr sogar ähnlich.

Hiermit sind alle Gruppen der gesuchten Beschaffenheit mit inf. Transformationen zweiter Ordnung auf eine gemeinsame canonische Form gebracht. Diese canonische Gruppe umfasst alle Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen des  $n$ -fach ausgedehnten Raumes. Sie lässt überdies, wie

man ohne weiter übersieht, die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = 0$$

und selbstverständlich keine andere Gleichung

$$\sum f_{ik}(x_1 \dots x_n) dx_i dx_k = 0$$

invariant.

Aus dem Vorangehenden lässt sich überdies herleiten, dass die Gruppe (C) die allgemeinste endliche continuirliche Gruppe ist, welche die Gleichung  $\sum dx_k^2 = 0$  invariant lässt. Die allgemeinste derartige Gruppe, welche diese Forderung erfüllt, umfasst nämlich jedenfalls die inf. Transformationen (C) und kann daher in der Umgebung des Punktes  $x_k = 0$  keine weitere von nullter oder erster Ordnung enthalten; dann aber hat sie auch keine weitere von höherer Ordnung und deckt sich somit mit der Gruppe (C).

Setzen wir als bekannt voraus, dass auch jede unendliche Gruppe mit den beiden inf. Transformationen  $Xf, Yf$  zugleich die inf. Transformation  $X(Y(f)) - Y(X(f))$  umfasst, so können wir aus dem Vorangehenden ein noch weitergehendes Resultat herleiten. Lässt in der That eine continuirliche, endliche oder unendliche Gruppe die Gleichung  $\sum dx^2 = 0$  invariant, so enthält sie offenbar in der Umgebung des Punktes allgemeiner Lage  $x_k = 0$  keine weiteren inf. Transformationen nullter und erster Ordnung als

$$p_k, x_i p_k - x_k p_i, \sum x_k p_k;$$

räsonnirt man dann weiter, wie pag. 392; so erkennt man zunächst, dass alle auftretenden inf. Transformationen zweiter Ordnung die Form

$$2x_k \sum x_i p_i - p_k \sum x_i^2 + \dots$$

besitzen, ferner dass es gar keine inf. Transformationen dritter oder höherer Ordnung giebt. Die gesuchte Gruppe ist somit *endlich* und deckt sich mit der früher gefundenen.

Wir werden schliesslich andeuten, wie man durch eine direkte Methode die allgemeinste inf. Transformation

$$Xf = \xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n$$

findet, welche die Gleichung  $\sum dx_k^2 = 0$  invariant lässt. Diese Forderung kommt darauf hinaus, dass der Ausdruck  $X(\sum dx^2)$  vermöge  $\sum dx^2 = 0$  verschwinden muss, dass also eine Gleichung der Form

$$2 \sum_k d\xi_k dx_k = \rho \sum dx_k^2$$

besteht; dieselbe zerlegt sich in die Gleichungen

$$2 \frac{d\xi_k}{dx_k} = \rho, \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = 0,$$

deren Integration keine Schwierigkeit darbietet.

12. Es bleibt übrig alle transitiven Gruppen in  $m$  Variablen zu finden, welche  $m + \frac{m(m-1)}{1, 2}$  infinitesimale Transformationen enthalten, deren Reihenentwicklungen in der Umgebung des Punktes allgemeiner Lage  $x_k = 0$  die Form

$$p_k + \dots = P_k, \quad x_i p_k - x_k p_i + \dots = S_{ik}$$

besitzen. Bei der Erledigung dieses Problems scheint es zweckmässig, die Unterfälle, dass  $m$  gerade  $m = 2n$ , und dass  $m$  ungerade  $m = 2n + 1$  ist, für sich zu behandeln. Gleichzeitig denken wir uns, dass die invariante Differentialgleichung

$$\sum f_{ik} (x_1 \dots x_m) x_i' x_k' = 0$$

bei der Substitution  $x_k = 0$  nicht, wie früher angenommen, die Form  $\sum x_k'^2 = 0$ , sondern die eine unter den beiden Formen

$$x_1' x_2' + x_3' x_4' + \dots + x'_{2n-1} x'_{2n} = 0 \quad (m = 2n)$$

$$x_1' x_2' + \dots + x'_{2n-1} x'_{2n} + x'_{2n+1}{}^2 = 0 \quad (m = 2n+1)$$

erhält.

Ist dann  $m = 2n$ , so enthält die gesuchte Gruppe  $2n + n(2n-1)$

inf. Transformationen, deren Reihenentwickelungen nach den  $x_k$  die Form

$$\begin{aligned} p_1 + \dots &= P_1, \dots \dots p_{2n} + \dots = P_{2n} \\ x_{2\mu} p_{2\nu} - x_{2\nu-1} p_{2\mu-1} + \dots &= S_{2\nu, 2\mu-1} \\ x_{2\mu-1} p_{2\nu} - x_{2\nu-1} p_{2\mu} + \dots &= S_{2\nu, 2\mu} \\ x_{2\mu} p_{2\nu-1} - x_{2\nu} p_{2\mu-1} + \dots &= S_{2\nu-1, 2\mu-1} \end{aligned}$$

besitzen. Die Indices  $2\nu, 2\nu-1, 2\mu, 2\mu-1$  durchlaufen alle Werthe, die  $2n$  nicht übersteigen.

Die zwischen den  $S_{\alpha, \beta}$  stattfindenden Relationen enthalten keine unbekanntenen Constanten, können vielmehr ohne weiter aufgestellt werden. Bezeichnen wir überhaupt mit  $\alpha$  und  $\bar{\alpha}$  zwei beliebige Zahlen  $2\nu-1$  und  $2\nu$ , so dass, wenn  $\alpha=2\nu-1$  ist, dann  $\bar{\alpha}=2\nu$  ist, während, wenn  $\alpha=2\nu$  ist, dann  $\bar{\alpha}=2\nu-1$  ist, so lassen sich die zwischen den  $S_{ik}$  bestehenden Relationen in die einzige Gleichung

$$(S_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta}) = \varepsilon_{\alpha\bar{\delta}} S_{\gamma\beta} - \varepsilon_{\alpha\bar{\gamma}} S_{\delta\beta} - \varepsilon_{\beta\bar{\delta}} S_{\gamma\alpha} + \varepsilon_{\beta\bar{\gamma}} S_{\delta\alpha}$$

zusammenfassen.

Dagegen enthalten alle übrigen Relationen, in denen mindestens eine  $P_k$  eingeht, unbekanntene Constanten. Wir normiren die  $P_k$  in solcher Weise, dass auch diese Relationen eine möglichst einfache Form erhalten. Zu diesem Zwecke bilden wir die infinitesimale Transformation

$$\sum \lambda_i S_{2i-1, 2i} = \lambda_1 S_{1, 2} + \lambda_2 S_{3, 4} + \dots + \lambda_n S_{2n-1, 2n},$$

deren Ausdruck  $n$  arbiträre Parameter  $\lambda$  enthält, welche wir übrigens sämmtlich ohne Beschränkung gleich 1 setzen könnten.

Ist nun

$$\begin{aligned} (P_1, \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) &= \lambda_1 P + \sum A_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} + \sum B_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} \\ &+ \sum C_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1} \end{aligned}$$

und setzen wir

$$P_1' = P_1 + \sum \alpha_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} + \sum \beta_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} + \sum \gamma_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1},$$

so wird

$$\begin{aligned} (P_1', \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) &= \lambda_1 P_1' + \sum [(\lambda_\mu - \lambda_\nu - \lambda_1) \alpha_{\nu\mu} + A_{\nu\mu}] S_{2\nu, 2\mu-1} \\ &\quad + \sum [(-\lambda_\nu - \lambda_\mu - \lambda_1) \beta_{\nu\mu} + B_{\nu\mu}] S_{2\nu, 2\mu} \\ &\quad + \sum [(\lambda_\nu + \lambda_\mu - \lambda_1) \gamma_{\nu\mu} + C_{\nu\mu}] S_{2\nu-1, 2\mu-1}. \end{aligned}$$

Sind daher die  $\lambda_k$  in solcher Weise gewählt, dass alle Ausdrücke  $\pm \lambda_\mu \pm \lambda_\nu \pm \lambda_\rho$  von Null verschieden sind, was ja insbesondere eintritt, wenn alle  $\lambda_i$  gleich 1 sind, so können die Constanten  $\alpha, \beta, \gamma$  derart particularisirt werden, dass wir die einfache Formel

$$(P_1', \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) = \lambda_1 P_1'$$

erhalten.

Wir können daher annehmen, dass die  $P_k$  in solcher Weise normirt sind, dass für jedes  $k$  die Formel

$$(P_k, \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) = \lambda_k P_k$$

besteht.

Jetzt bilden wir mit den drei infinitesimalen Transformationen

$$P_1, \quad \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}, \quad S_{2k-1, 2k}$$

die *Jacobische* Identität, aus welcher das zweite Glied wegfällt, also die Gleichung

$$((P_1, \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) S_{2k-1, 2k}) - ((P_1 S_{2k-1, 2k}) \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) = 0$$

woraus

$$\lambda_1 (P_1 S_{2k-1, 2k}) - ((P_1 S_{2k-1, 2k}) \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}) = 0.$$

Ist daher  $k \geq 1$  und

$$\begin{aligned} (P_1 S_{2k-1, 2k}) &= \sum \alpha'_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} + \sum \beta'_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} \\ &\quad + \sum \gamma'_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1}, \end{aligned}$$

so erhält unsere Identität die Form

$$\begin{aligned} \sum (\lambda_1 - \lambda_\mu + \lambda_\nu) \alpha'_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} + \sum (\lambda_1 + \lambda_\nu + \lambda_\mu) \beta'_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} \\ + \sum (\lambda_1 - \lambda_\nu - \lambda_\mu) \gamma'_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1} = 0, \end{aligned}$$

welche, da kein Ausdruck  $\pm \lambda_\mu \pm \lambda_\nu \pm \lambda_\rho$  verschwindet, uns zeigt, dass  $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$  ist. Es besteht also die allgemeine Formel

$$(P_\mu, S_{2\nu-1, 2\nu}) = \varepsilon_{\mu, 2\nu-1} P_{2\nu-1} - \varepsilon_{\mu, 2\nu} P_{2\nu}.$$

Um jetzt noch alle

$$\begin{aligned} (P_j, S_{2\pi, 2\rho-1}) = \varepsilon_{j, 2\rho} P_{2\pi} - \varepsilon_{j, 2\pi-1} P_{2\rho-1} \\ + \sum \alpha''_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} + \sum \beta''_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} + \sum \gamma''_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1} \end{aligned}$$

zu finden, bilden wir mit den inf. Transformationen

$$P_j, \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}, S_{2\pi, 2\rho-1}$$

die *Jacobische* Identität; die hervorgehende Formel

$$\begin{aligned} 0 = \sum (\lambda_\mu - \lambda_\nu + \lambda_\pi - \lambda_\rho - \lambda_j) \alpha''_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} \\ + \sum (-\lambda_\mu - \lambda_\nu + \lambda_\pi - \lambda_\rho - \lambda_j) \beta''_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} \\ + \sum (\lambda_\mu + \lambda_\nu + \lambda_\pi - \lambda_\rho - \lambda_j) \gamma''_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1} \end{aligned}$$

zeigt, vorausgesetzt, dass alle Ausdrücke

$$\pm \lambda_\mu \pm \lambda_\nu \pm \lambda_\pi \pm \lambda_\rho \pm \lambda_j$$

von Null verschieden sind, was ja insbesondere eintritt, wenn alle  $\lambda_i$  gleich 1 sind, dass

$$\alpha''_{\nu\mu} = \beta''_{\nu\mu} = \gamma''_{\nu\mu} = 0$$

ist. Es besteht daher die allgemeine Formel

$$(P_j, S_{2\pi, 2\rho-1}) = \varepsilon_{j, 2\rho} P_{2\pi} - \varepsilon_{j, 2\pi-1} P_{2\rho-1}$$

und ähnliche Ueberlegungen geben die analogen Formeln

$$(P_j, S_{2\pi, 2\rho}) = \varepsilon_{j, 2\rho-1} P_{2\pi} - \varepsilon_{j, 2\pi-1} P_{2\rho}$$

$$(P_j, S_{2\pi-1, 2\rho-1}) = \varepsilon_{j, 2\rho} P_{2\pi-1} - \varepsilon_{j, 2\pi} P_{2\rho-1}$$

Endlich müssen wir alle  $(P_\alpha P_\beta)$  berechnen. Sei

$$(P_{2i-1} P_{2i}) = \sum \delta_{i\nu} P_\nu + \sum \alpha_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu-1} + \sum \beta_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu} \\ + \sum \gamma_{\nu\mu} S_{2\nu-1, 2\mu-1}$$

Wir bilden mit den inf. Transformationen

$$P_{2i-1}, P_{2i}, \sum \lambda_i S_{2i-1, 2i}$$

die *Jacobische* Identität, wobei sich zwei Glieder aufheben, und tragen darnach den Werth von  $(P_{2i-1} P_{2i})$  ein. Dann ergibt sich, wenn die  $\lambda$  paarweise von einander wie auch von Null verschieden angenommen werden, dass die  $(P_{2i-1} P_{2i})$  die Form

$$(P_{2i-1} P_{2i}) = \sum_k c_{ik} S_{2k-1, 2k}$$

besitzen. Bilden wir darnach die Identität

$$((P_{2i-1}, P_{2i}) S_{2i+1, 2i}) + ((P_{2i} S_{2i+1, 2i}) P_{2i-1}) + ((S_{2i+1, 2i} P_{2i-1}) P_{2i}) = 0,$$

so ergibt sich

$$(P_{i+1} P_{2i}) = (c_{ii} - c_{i, i+1}) S_{2i+1, i}.$$

Dem entsprechend liefert die Identität

$$((P_{2i-1} P_{2i}) S_{2i+1, 2i-1}) + ((P_{2i} S_{2i+1, 2i-1}) P_{2i-1}) \\ + ((S_{2i+1, 2i-1} P_{2i-1}) P_{2i}) = 0$$

die Formel

$$(P_{2i+1} P_{2i-1}) = (c_{ii} + c_{i, i+1}) S_{2i+1, 2i-1},$$

und eine ähnliche Ueberlegung giebt

$$(P_{2i} P_{2i+2}) = - (c_{ii} + c_{i, i+1}) S_{2i+2, 2i} = (c_{ii} + c_{i, i+1}) S_{2i, 2i+2}.$$

Bilden wir endlich die Jacobische Identität mit den drei inf. Transformationen  $P_{2i-1}$ ,  $P_{2i}$ ,  $P_{2i+1}$ , so ergibt sich, dass  $c_{i,i+1} = 0$  ist, und dementsprechend, dass alle  $c_{ik}$ , deren Indices  $i$  und  $k$  verschieden sind, den Werth Null besitzen. Wir haben also die drei Formeln

$$(P_{2i-1} P_{2i}) = c_{ii} S_{2i-1, 2i}; \quad (P_{2i+1, 2i} P_{2i}) = c_{ii} S_{2i+1, 2i}; \\ (P_{2i} P_{2i+2}) = c_{ii} S_{2i, 2i+2},$$

welche die gemeinsame Form

$$(P_{\alpha} P_{\beta}) = c_{ii} S_{\alpha, \beta}$$

besitzen. Diese letzte Formel gilt, wie man leicht einsieht, für alle Werthe der Indices  $\alpha\beta$ , und dabei ist die Constante  $c_{ii}$  offenbar von  $i$  unabhängig:

$$(P_{\alpha} P_{\beta}) = c S_{\alpha\beta}.$$

Hiermit sind alle Relationen bestimmt. Es giebt offenbar zwei und nur zwei Möglichkeiten. Ist  $c = 0$ , so ist unsere Gruppe holoedrisch isomorph, ja ähnlich mit der Gruppe

$$p_k, \quad x_i p_k - x_k p_i,$$

d. h. mit der Gruppe aller Bewegungen eines  $2n$ -fach ausgedehnten *Euclidischen* Raumes. Ist dagegen  $c$  verschieden von Null, so ergibt sich, indem  $\frac{1}{\sqrt{c}} P_k$  als neue  $P_k$  eingeführt wird, dass  $c$  ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden kann. Alle derartigen Gruppen sind daher holoedrisch isomorph und gleichzeitig ähnlich mit der projectivischen Gruppe einer nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades im  $2n$ -fachen Raume  $x_1 \dots x_{2n}$ . —

Ist die Zahl  $m$  ungerade, etwa  $m = 2n + 1$ , so gelangen wir durch analoge Ueberlegungen genau zu demselben Resultate, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wie früher gesagt, denken wir uns jetzt, dass die invariante Gleichung  $\sum f_{ik}(x) x_i' x_k' = 0$  bei der Substitution  $x_k = 0$



die Form

$$x_1' x_2' + x_3' x_4' + \dots + x_{2n-1}' x_{2n}' + x_{2n+1}'^2 = 0 = \sum x_\alpha' x_{\alpha'} + x_{2n+1}'^2$$

annimmt. Dann haben die Reihenentwickelungen nach den  $x$  von den infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe die Form

$$p_1 + \dots = P_1 \dots p_{2n+1} + \dots = P_{2n+1} \\ S_{2\nu, 2\mu-1}, S_{2\nu, 2\mu}, S_{2\nu-1, 2\mu-1} \\ x_i p_{2n+1} - 2x_{2n+1} p_i = T_i,$$

wo die  $S_{ab}$  ganz dieselben Ausdrücke wie im vorigen Falle bezeichnen.

Wir bezeichnen mit  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  Constanten, welche nur nicht gewisse Ausnahmewerthe besitzen, setzen sodann

$$\sum_1^n \lambda_i S_{2i-1, 2i} = U$$

und können darnach  $P_{2n+1}$  so normiren, dass es wird

$$(P_{2n+1} U) = \sum_k C_k S_{2k-1, 2k};$$

durch diese Forderung ist  $P_{2n+1}$  vollständig normirt bis auf ein arbiträres additives Glied der Form  $\sum d_\nu S_{2\nu-1, 2\nu}$ . Hier-nach bilden wir die *Jacobische* Identität

$$((P_{2n+1} U) S_{2k-1, 2k}) + ((U S_{2k-1, 2k}) P_{2n+1}) \\ + ((S_{2k-1, 2k} P_{2n+1}) U) = 0$$

deren linke Seite sich auf das dritte Glied reducirt. Da wir uns nun Ausnahmewerthe der  $\lambda_k$  ausgeschlossen denken können, erkennen wir, dass für jedes  $k$  Relationen der Form

$$(P_{2n+1}, S_{2k-1, 2k}) = \sum_i c_{ki} S_{2i-1, 2i}$$

bestehen.

Um die Constanten in den Formeln

$$(P_{2n+1} S_{2\nu, 2\mu}) = \sum \alpha_{\nu'\mu'} S_{2\nu', 2\mu'-1} + \sum \beta_{\nu'\mu} S_{2\nu', 2\mu} + \sum \gamma_{\nu'\mu'} S_{2\nu', 2\mu'-2} + \sum \delta_i T_i$$

zu bestimmen, bilden wir die Identität

$$((P_{2n+1} S_{2\nu, 2\mu}) U) + ((S_{2\nu, 2\mu} U) P_{2n+1}) + ((U P_{2n+1}) S_{2\nu, 2\mu}) = 0$$

und durch Ausführung

$$\begin{aligned} 0 = & \sum (\lambda_{\mu'} - \lambda_{\nu'}) \alpha_{\nu'\mu'} S_{2\nu', 2\mu'-1} + \sum (-\lambda_{\nu'} - \lambda_{\mu'}) \beta_{\nu'\mu} S_{2\nu', 2\mu} \\ & + \sum (\lambda_{\nu'} + \lambda_{\mu'}) \gamma_{\nu'\mu'} S_{2\nu'-1, 2\mu'-1} + \sum (-1)^i \lambda_i \delta_i T_i - (C_{\mu} + C_{\nu}) S_{2\nu, 2\mu} \\ & + (\lambda_{\nu} + \lambda_{\mu}) (\sum \alpha_{\nu'\mu'} S_{2\nu', 2\mu'-1} + \sum \beta_{\nu'\mu} S_{2\nu', 2\mu} + \sum \gamma_{\nu'\mu'} S_{2\nu'-1, 2\mu'-1} + \sum \delta_i T_i) \end{aligned}$$

oder geordnet

$$\begin{aligned} 0 = & \sum (\lambda_{\mu'} - \lambda_{\nu'} + \lambda_{\nu} + \lambda_{\mu}) \alpha_{\nu'\mu'} S_{2\nu', 2\mu'-1} + \sum (-\lambda_{\nu'} - \lambda_{\mu'} + \lambda_{\nu} + \lambda_{\mu}) \beta_{\nu'\mu} S_{2\nu', 2\mu} \\ & + \sum (\lambda_{\nu} + \lambda_{\mu} + \lambda_{\nu} + \lambda_{\mu}) \gamma_{\nu'\mu'} S_{2\nu'-1, 2\mu'-1} + \sum \delta_i (\dots \lambda_i + \lambda_{\nu} + \lambda_{\mu}) T_i + (C_{\mu} - C_{\nu}) S_{2\nu, 2\mu} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass alle  $\alpha_{\nu'\mu'}$   $\beta_{\nu'\mu'}$   $\gamma_{\nu'\mu'}$   $\delta_i$  ausser etwa  $\alpha_{\nu\mu}$  gleich Null sind, dass also

$$(P_{2n+1} S_{2\nu, 2\mu}) = d_{\nu\mu} S_{2\nu, 2\mu}.$$

In entsprechender Weise ergibt sich für alle Indices  $\alpha\beta$ :

$$(P_{2n+1} S_{\alpha\beta}) = e_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}.$$

und dabei ist es, zeigen wir bald, möglich,  $P_{2n+1}$  derart mit den  $S_{2i-1,2i}$  zu normiren, dass alle  $e_{\alpha\beta}$  verschwinden.

Wir bilden die beiden Identitäten

$$0 = ((P_{2n+1} S_{2\mu,2\nu}) S_{2\nu-1,2\nu}) + ((S_{2\mu,2\nu} S_{2\nu-1,2\nu}) P_{2n+1}) \\ + ((S_{2\nu-1,2\nu} P_{2n+1}) S_{2\mu,2\nu})$$

$$0 = ((P_{2n+1} S_{2\mu-1,2\nu}) S_{2\nu-1,2\nu}) + ((S_{2\mu-1,2\nu} S_{2\nu-1,2\nu}) P_{2n+1}) \\ + ((S_{2\nu-1,2\nu} P_{2n+1}) S_{2\mu-1,2\nu})$$

in denen beidemale die beiden ersten Glieder sich aufheben.

Also wird

$$- \sum_k c_{\nu k} (S_{2k-1,2k} S_{2\mu,2\nu}) = 0 = (c_{\nu\nu} + c_{\nu\mu}) S_{2\mu,2\nu}$$

$$- \sum_k c_{\nu k} (S_{2k-1,2k} S_{2\mu-1,2\mu}) = 0 = (c_{\nu\nu} - c_{\nu\mu}) S_{2\mu-1,2\nu}$$

woraus  $c_{\nu\nu} = c_{\nu\mu} = 0$  und

$$(P_{2n+1} S_{2k-1,2k}) = 0.$$

Ehe wir jetzt weiter gehen, entwickeln wir eine bemerkenswerthe Formel, die wir später verwerthen. Seien  $\alpha$  und  $\bar{\alpha}$  wie früher zwei beliebige Zahlen der Form  $2\nu-1$  und  $2\nu$ , ebenso  $\beta$  und  $\bar{\beta}$  zwei andere Zahlen dieser Form. Bilden wir darnach die Identität

$$((P_{2n+1} S_{\alpha\beta}) S_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) \times ((S_{\alpha\beta} S_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) P_{2n+1}) + ((S_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} P_{2n+1}) S_{\alpha\beta}) = 0$$

oder ausgeführt

$$e_{\alpha\beta} (S_{\alpha\beta} S_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) + (S_{\bar{\beta}\bar{\beta}} S_{\bar{\alpha}\alpha}, P_{2n+1}) - e_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} (S_{\bar{\beta}\bar{\alpha}} S_{\alpha\beta})$$

oder endlich

$$(e_{\alpha\beta} + e_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}) (S_{\bar{\beta}\bar{\beta}} + S_{\bar{\alpha}\alpha}) = 0$$

so folgt

$$e_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = e_{\alpha\beta}.$$

Dieses vorausgesetzt, werden wir  $P_{2n+1}$  derart mit  $S_{12}$  und  $S_{34}$  normiren, dass

$$(P_{2n+1} S_{32}) = 0, (P_{2n+1} S_{42}) = 0;$$

alsdann liefert die Formel  $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}$  uns unmittelbar

$$(P_{2n+1} S_{14}) = 0, (P_{2n+1} S_{13}) = 0.$$

Hiernach normiren wir  $P_{2n+1}$  derart mit  $S_{56}$ , dass es wird

$$(P_{2n+1}, S_{52}) = 0 \text{ und folglich } (P_{2n+1} S_{16}) = 0.$$

Bilden wir sodann die Identitäten

$$((P_{2n+1} S_{52}) S_{13}) + (P_{2n+1} S_{53}) = 0$$

$$((P_{2n+1} S_{52}) S_{14}) + (P_{2n+1} S_{54}) = 0$$

$$((P_{2n+1} S_{53}) S_{14}) + (P_{2n+1} S_{15}) = 0$$

so folgt

$$(P_{2n+1} S_{53}) = 0, (P_{2n+1} S_{54}) = 0, (P_{2n+1} S_{15}) = 0$$

und mit Benützung der Formel  $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}$ :

$$(P_{2n+1} S_{46}) = 0, (P_{2n+1} S_{36}) = 0, (P_{2n+1} S_{62}) = 0.$$

Indem wir in dieser Weise fortfahren, erkennen wir, dass  $P_{2n+1}$  sich derart normiren lässt, dass alle  $e_{\alpha\beta}$  verschwinden und folglich die allgemeine Formel

$$(P_{2n+1} S_{\alpha\beta}) = 0$$

besteht.

Endlich normiren wir die übrigen  $P_i$  derart, dass die Gleichung

$$(P_{2n+1}, T_i) = -2 P_i$$

besteht; bilden darnach die Identität

$$((P_{2n+1} T_i) S_{\alpha\beta}) + ((T_i S_{\alpha\beta}) P_{2n+1}) + ((S_{\alpha\beta} P_{2n+1}) T_i) = 0$$

und erkennen, indem wir bemerken, dass  $(T_i S_{\alpha\beta})$  immer

gleich einer gewissen  $T$  ist, dass alle  $(P_1 S_{\alpha\beta})$  die Werthe

$$(P_1 S_{\alpha\beta}) = \varepsilon_{i\bar{\beta}} P_\alpha - \varepsilon_{i\bar{\alpha}} P_\beta$$

besitzen. Zur Berechnung von den  $(P_1 T_k)$  bilden wir zunächst die Identität

$$((P_1 T_2) S_{1_2}) + ((T_2 S_{1_2}) P_1) + ((S_{1_2} P_1) T_2) = 0$$

oder

$$((P_1 T_2) S_{1_2}) - 2(P_1 T_2) = 0,$$

woraus

$$(P_1 T_2) = 0.$$

Ferner ist

$$((P_1 T_1) U) + ((T_1 U) P_1) + ((U P_1) T_1) = 0$$

und da sich die beiden letzten Glieder aufheben, folgt

$$(P_1 T_1) = P_{2n+1}.$$

Ebenso giebt die Identität

$$((P_1 T_1) S_{3_1}) + ((T_1 S_{3_1}) P_1) + ((S_{3_1} P_1) T_1) = 0,$$

in welcher das erste und letzte Glied wegfallen, die Formel  $(P_1 T_4) = 0$ . In dieser Weise ergibt sich die allgemeine Formel

$$(P_1 T_k) = \varepsilon_{ik} P_{2n+1}. \quad (i \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 2n + 1).$$

Indem man fast genau wie im vorigen Falle verfährt, erkennt man, dass die Formel

$$(P_\alpha P_\beta) = e_{\alpha\beta} P_{2n+1} + c S_{\alpha\beta}$$

immer besteht, welche unter den Zahlen  $1 \dots 2n$  auch  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnen mögen. Um noch  $(P_k P_{2n+1})$  zu berechnen, bilden wir mit  $P_k$ ,  $P_{2n+1}$  und  $U$  die Jacobische Identität und erhält hierdurch

$$(P_k P_{2n+1}) = \alpha_k P_k + \beta_k T_k.$$

Es ist andererseits

$$((P_{2n+1} T_k) P_k) + ((T_k P_k) P_{2n+1}) + ((P_k P_{2n+1}) T_k) = 0$$

und also

$$2(P_k P_{\bar{k}}) + \alpha_k P_{2n+1} + 2 \sum \beta_k S_{k\bar{k}} = 0,$$

woraus

$$\alpha_k = -2 e_{k\bar{k}}, \quad \beta_k = -c$$

und

$$(P_k P_{2n+1}) = -2 e_{k\bar{k}} P_k - c T_{\bar{k}}$$

Bilden wir jetzt die Jacobische Identität mit  $P_1$ ,  $P_2$  und  $S_{3,2}$ , so ergibt sich

$$(P_2 P_3) = c S_{2,3};$$

und wenn dieselbe Identität mit  $P_2$ ,  $P_3$  und  $S_{1,4}$  gebildet wird, so kommt

$$(P_3 P_4) = e_{1,2} P_{2n+1} + c S_{3,4}.$$

Bilden wir andererseits die Identität mit  $P_1$ ,  $P_2$  und  $S_{4,2}$ , so ergibt sich

$$(P_2 P_4) = c S_{2,4},$$

und wenn dieselbe Identität mit  $P_2$ ,  $P_4$  und  $S_{1,3}$  gebildet wird, so kommt

$$(P_3 P_4) = -e_{1,2} P_{2n+1} + c S_{3,4},$$

woraus hervorgeht, dass die Constante  $e_{1,2}$  gleich Null ist.

Aehnliche Ueberlegungen geben, wenn  $i$  und  $k$  zwei beliebige Indices bezeichnen, die kleiner als  $2n + 1$  sind, die Formeln

$$(P_i P_k) = c S_{ik}, \quad (P_k P_{2n+1}) = -c T_{\bar{k}}.$$

Zu bemerken ist übrigens, dass bei der hier ausgeführten Berechnung der Fall  $2n + 1 = 3$ , also der Fall eines dreifach ausgedehnten Raumes implicite ausgeschlossen worden ist.

Ganz wie im vorigen Falle ergibt sich, dass nur die beiden Fälle  $c = 0$  und  $c = 1$  wesentlich verschiedene Gruppen liefern; offenbar giebt die Annahme  $c = 0$  die Bewegungen eines  $(2n + 1)$ -fachen *Euclidischen* Raumes, die Annahme  $c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  giebt die projectivische Gruppe einer allgemeinen Fläche zweiten Grades, also die Gruppe aller nicht-euclidischen Bewegungen im  $(2n + 1)$ -fachen Raume.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so erhalten wir das folgende allgemeine Theorem, unter dem sich frühere Resultate von *Liouville* und *Rieman* als specielle Fälle subsumiren.

*Theorem.* Lässt eine continuirliche, endliche oder unendliche Gruppe von Punkttransformationen des Raumes  $x_1 \dots x_m$  eine Differentialgleichung zweiten Grades

$$\sum f_{ik} (x_1 \dots x_m) dx_i dx_k = 0$$

mit nicht verschwindender Determinante  $f_{ik}$  invariant; werden ferner die durch einen festgehaltenen Punkt  $(x)$  gehenden Richtungen  $x_k'$  transformirt durch die allgemeinste projectivische Gruppe  $\sum f_{ik} x_i' x_k' = 0$ , so sind vier Fälle möglich: Die Gruppe ist ähnlich mit der Gruppe aller Bewegungen des  $m$ -fachen Raumes; 2) sie ist ähnlich mit der Gruppe aller Aehnlichkeits-transformationen des  $m$ -fachen Raumes; 3) sie ist ähnlich mit der Gruppe aller conformen Transformationen; 4) sie ist ähnlich mit der allgemeinen projectivischen Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante.

Die im Vorangehenden ausdrücklich ausgeschlossenen Fälle  $m = 2$ ,  $m = 3$  sind schon bei früheren Gelegenheiten erledigt worden.

Zum Schlusse noch einige kurzgefasste Untersuchungen über die Zusammensetzung der gefundenen Gruppen.

Die projectivische Gruppe einer Fläche zweiten Grades

im  $(n + 1)$ -fachen Raume ist bekanntlich isomorph (ja in gewissem Sinne ähnlich) mit der allgemeinen conformen Gruppe im  $n$ -fachen Raume:

$$P_k = p_k + \dots, S_{ik} = x_i p_k = x_k p_i + \dots, U = \sum x_k p_k \\ V_k = 2 x_k U - p_k \sum x_i^2.$$

Es ist nicht schwierig nachzuweisen, dass diese letzte Gruppe einfach ist. Existirte nämlich eine invariante Untergruppe, so erkannte man durch wiederholte Combination einer infinitesimalen Transformation derselben

$$\sum a_k P_k + \sum b_{ik} S_{ik} + b U + \sum d_k V_k$$

mit zweckmässigen Translationen  $P_i$ , dass die betreffende invariante Gruppe sicher eine infinitesimale Translation  $\sum d_k P_k$  enthält. Nun aber sind alle inf. Translationen, für welche  $\sum \alpha_k^2$  von Null verschieden ist, schon innerhalb der Gruppe aller Bewegungen  $P_k, S_{ij}$  und umsomehr innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe mit einander gleichberechtigt; ebenfalls sind alle inf. Translationen, für welche  $\sum \alpha_k^2$  gleich Null ist, innerhalb derselben Gruppen mit einander gleichberechtigt. Da nun die letztgenannten Translationen in keiner kleineren Gruppe als die Gruppe *aller* Translationen enthalten sind, so schliessen wir, dass die besprochene invariante Gruppe, die ja jedenfalls eine inf. Translation  $\sum \alpha_k P_k$  enthält, unter allen Umständen alle Translationen umfasst. Nun ist

$$(P_k V_k) = 2 U, (P_k V_i) = 2 S_{ik},$$

und also umfasst die betreffende invariante Untergruppe alle Aehnlichkeitstransformationen; da ferner

$$(U V_k) = V_k$$

ist, so erkennen wir, dass die betreffende invariante Gruppe mit der Gruppe aller conformen Transformationen sich deckt. Also



*Satz.* In einem Raume mit mehr als zwei Dimensionen ist die continuirliche Gruppe aller conformen Transformationen einfach.

und ebenso

*Satz.* In einem Raume mit mehr als drei Dimensionen ist die continuirliche projectivische Gruppe einer Fläche zweiten Grades, deren Determinante nicht verschwindet, immer einfach.

Es hat keine Schwierigkeit, die invarianten Untergruppen in den Gruppen aller Bewegungen und aller Aehnlichkeits-  
transformationen zu bestimmen. Hat der betreffende Raum mehr als vier Dimensionen, so giebt es keine anderen derartigen Untergruppen als die Gruppe aller Translationen, die Gruppe aller Aehnlichkeitstransformationen, bei denen alle unendlich fernen Punkte ihre Lage behalten, und die Gruppe aller Bewegungen.

---

## Svenske geologer om indsjøerne

af

Amund Helland.

- Nathorst, A. G.* Pumpellys teori om betydelsen af bergarternas sekulära forvittring för uppkomsten af sjöar m. m.
- Törnebohm, A. E.* Några ord om klippbassiner och åsar.
- Nathorst, A. G.* Några anmärkningar med anledning af Dr. Törnebohms uppsats om klippbassiner och åsar.
- Nathorst, A. G.* Om de svenska urbergens sekulära forvittring.
- Nathorst, A. G.* Om de äldre sandstens- och skifferbildningarne vid Vettern
- Törnebohm, A. E.* Kanna de svenska sjöbäckena förklaras såsom en direkt följd af den sekulära forvittringen?
- Nathorst, A. G.* Ytterligare om sjöbäcken och sekulär forvittring.
- Törnebohm, A. E.* Några ord med anledning af Dr. Nathorsts uppsats: »Ytterligare om sjöbäcken och sekulär forvittring«.
- Nathorst, A. G.* Slutord i frågan om sjöbäcken och vittring.

Geologiska föreningens i Stockholm förhandlingar, Bind IV  
1878—79, Bind V 1880—81.

Medrette kalder Finnerne sit land »de tusen sjøers land«; thi Finland er helt oversaaet med sjøer, og talrige tjern fylder de mange smaabækkener. Man regner, at af Finlands overflade er 41670 km<sup>2</sup> eller 11,2 procent sjøer.

Sveriges areal af sjøer er endnu større end Finlands, nemlig 42612 km<sup>2</sup>, men regnet i procenter af overfladen noget mindre, nemlig 9.6 procent.

Her hos os er der 7581 km<sup>2</sup> sjøer, eller 2.4 procent af overfladen optages af indsjøerne. Hertil kommer imidlertid de mangfoldige bækkener, som er fyldt af havet, og som i form af fjorde gennemskjærer vor kyst.

Alle disse bækkenformede fordybninger er et yderst eienommeligt træk ved disse landes orografi. Spørgsmaalet om deres dannelse er vidtløftigt diskuteret, og litteraturen om denne gjenstand ikke ubetydelig. Problemet er efter min mening løst af skotske geologer, saaledes som jeg i forskjellige arbejder har forsøgt at paavise. Naar jeg ikke destomindre atter vender tilbage til sjøerne, saa har dette sin grund i, at to fremragende svenske geologer *Dr. Nathorst* og *Dr. Törnebohm* for nogle aar siden optog denne sag til diskussion, hver fra sit standpunkt, og saa vidt differerer meningerne om denne sag, at Dr Nathorst i sin første opsats betegner spørgsmaalet om sjøernes dannelse som »endnu fuldkommen uudredet«.

Under disse omstændigheder turde det være berettiget end yderligere at drøfte denne sag, saameget mere som den i Sverige førte diskussion ikke bragte enighed tilveie. Forskjellige argumenter, som tidligere er blevet anført, kom atter

frem, og dette, ligesom den omstændighed, at litteraturen om sjøernes dannelse er meget spredt i forskellige landes tidskrifter, bør tjene til undskyldning for, at her tildels anføres ting, som før er sagt paa andre steder.

*Dr. Nathorst* anvender Pumpellys teori om bergarternes sekulære forvitring paa de svenske indsjøer, idet selve fordybningerne eller bækkenerne tænkes fremkomne ved bergarternes forvitring under et gunstigere klimaat med frodigere vegetation før istiden. De fremkomne forvitningsprodukter blev liggende i bækkenerne, indtil istidens bræer rensede dem.

*Dr. Törnebohm* derimod ser i sjøerne et resultat af en relativ bevægelse i form af forskyvninger langs sprækker og sletter, hvilke forskyvninger fandt sted i berggrunden paa den tid, da denne var dækket af is, og han tillægger ismassernes tryk paa det af sprækker gjennemsatte fjeld en vigtig rolle ved bassinernes dannelse.

Vore sjøer, med sine ofte nøgne bredder og isbelagte en stor del af aaret, er forsøgt forklaret paa forskjellig vis, og vore talrige isskurede og tilrundede knauser, som de ligger der graa og bare, er en iøinefaldende og ofte omtalt eendommelighed ved landets overflade, men at disse sjøer med de omgivende smaakuperede landskaber hidrører fra en »overveiende kemisk forvitring, som endnu idag foregaar under de tropiske landstrøg, og som for sin tilværelse fordrer dels et yppigt vegetationsdække, de's varmt og rigeligt regn«, denne af *Dr. Nathorst* udviklede tanke var mig ny og overraskende. Ligesaa maa jeg tilstaa, at den af *Dr. Törnebohm* udviklede teori, hvorefter isen ligetil trykker ned det af sprækker sønderkaarne land, ogsaa var mig helt fremmed. Imidlertid har jeg forsøgt at anvende teorierne paa de bækkener, der er mig bekjendte.

*Berettigelsen af en almindelig teori.*

For at en diskussion om sjøerne *i sin almindelighed* skal være berettiget, maa det forudsættes, at alle disse paa store nordlige — og sydlige — bredder optrædende bækkener er dannelser af nogenlunde samme art, eller at kræfter af samme art har været virksomme ved deres dannelse. Hvis nemlig ikke saa var tilfældet, saa kan der ikke blive tale om nogen almindelig teori, og hver sjø maa betragtes for sig, og der bliver ligesaa mange spørgsmaal, som der er sjøer.

Fra den visseligen rigtige forudsætning om, at sjøerne i vore lande forklares ved en almindelig teori, synes ogsaa de svenske geologer fra først af at have gaaet ud; senere hen under diskussionen synes imidlertid denne forudsætning om, at kræfter af samme art har været virksomme til dannelsen af sjøerne, ikke at opretholdes af Dr. Nathorst, idet det heder\*):

»For at forebygge yderligere misforstaaelse skal jeg paa forhaand fremholde, at jeg aldrig har paastaaet eller kunnet paastaa, at alle vore sjøbækken skulde være dannede paa en og samme maade, men jeg antager, at her ligesom i andre lande paa ulige steder har kunnet været ulige kræfter virksomme. De sjøbækkener, som jeg sigter til, er de, som ligger inden det mellemste og sydlige Sveriges azoiske bergarter, og blandt disse fornemmelig de smaa.«

Skjønt det her ikke udtrykkelig er udtalt, at de sjøer, som ligger i det sydlige og mellemste Sverige, har en anden dannelse end sjøer i det nordlige Sverige, at de store sjøer er kommet til paa anden vis end de smaa, at de, som optræder i de azoiske bergarter, er opkommet paa anden vis

---

\*) Bind V, pag. 50. Bind og pagina i de efterfølgende anmærkninger er refereret til de Geologiska Föreningens Förhandlingar.

end de, som ligger inden de forsteningsførende lag, saa synes det dog, som om en *almindelig* anvendelse af Pumpellys teori paa sjødannelsen i vore lande er opgivet.

Dr. Törnebohm synes heller ikke med stor styrke at hævde en almindelig anvendelse for sin teori, idet han opkaster det spørgsmaal, om Norges fjeldomgivne fjorde og indsøer skulde kunne have en anden dannelse end de svenske indsøer; men han bemærker\*), og visseligen medrette, at analogien mellem disse (de svenske søer) og de norske fjorde er i flere henseender saa stor, at det ei synes meget sandsynlig, at de skulde være kommet til paa helt forskjellig vis.

Enhver diskussion har desto større interesse jo mindre speciel den er, og en teori har desto større videnskabelig værdi, jo flere problemer den formaar at løse. Men hvis vi med Dr. Nathorst anser smaasjøerne i det mellemste og sydlige Sveriges azoiske bergarter for dannede ved sekulær forvitring og senere rensning ved bræer, hvis vi fremdeles med samme forsker antager ældgamle søer af kambrisk alder, og hvis vi endelig med samme forfatter anser nogle søer opkomne ved ulige hævnning i samme dalbund og ved lags bønning o.<sup>l</sup>s. v.\*\*), saa bortfalder haabet om at finde en generel løsning af problemet om sjødannelsen paa nordlige bredder.

Man maa imidlertid under denne undersøgelse ikke miste de store forhold af sigte, og de store forhold synes mig paa det bestemteste at vise, at en almindelig aarsag ligger til grund for sjødannelsen. Sverige og Spanien er to lande af omtrent samme størrelse, og begge er gennemstrømmede af store elve. Men vi finder Sveriges overflade bestrøet med mange tusen smaa og store søer, medens Spanien ganske mangler saadanne. Hvis nu de svenske søer var dannet paa meget forskjellig vis, hvis nogle var ældgamle, nogle

\*) Bind IV, pag. 354.

\*\*) Se bind V, pag. 59.

fremkomne ved sekulær forvitring, nogle ved bøining af lag, nogle ved hævnningen af en dalbund o. s. v., saa bliver det et yderst mærkværdigt tilfældighedens spil, at alle disse kræfter skulde have virket i Sverige og ingen i Spanien, og end mere usandsynligt bliver dette, om vi sammenligner Finlands rigdom paa sjøer med Frankrigs fattigdom paa deslige bækkener o. s. v.

Naar vi fremdeles ser Portugals kyst stige op af havet med en ren kystlinie, medens Norge helt ifra Lindesnæs til Nordkap viser talrige dybe, lange og yderst eiendommelige indskjæringer i fast fjeld i form af fjorde, saa paatrænger sig uvilkaarligen den tanke, at kræfter af samme art har været virksomme langs hele vore kyst, og at lignende kræfter ikke har virket i Portugal.

Naar vi videre ved en nærmere undersøgelse af fjordene finder, at de ligesom sjøerne er bækkenformede fordybninger, og naar vi videre ser, at de lande, som har talrige sjøer, ogsaa har mere eller mindre vel udviklede fjorde, saa ligger den slutning nær, at vi i vore store sjøer og i vore smaa sjøer, i vore fjorde som i de smaa tjern har resultater af kræfter af samme art, og den tanke kan neppe afvises, at *en* stor almindelig aarsag til nordlige landes rigdom paa sjøer og sydligere landes fattigdom paa deslige bassiner maa være tilstede, og der skal stærke grunde til for at bevise, at sjøerne i begge lande er dannelser af forskjellig art, eller at en del svenske sjøer er tilblevet paa den maade, andre paa hin.

Den opfatning, som her er gjort gjældende, bestyrkes end yderligere derved, at vi finder alle overgange mellem sjøer af forskjellig størrelse, form og dybde, fra de mindste smaatjern til de største indsjøer og fjorde, saa at man, saa talrige og iøinefaldende disse klippebassiner end er, neppe kan inndele dem i forskjellige arter. Hvad der her er sagt, nemlig at en stor almindelig aarsag ligger til grund for sjø- og fjorddannelsen i vore lande, maa naturligvis ikke opfattes

som gjældende med mathematisk strengthed. Af de egentlige klippebassiner i fast fjeld, der optræder som sjøer og fjorde i Norge, kjender jeg rigtignok ingen, som skulde kunne tilskrives en særegen dannelselse, forskjellig fra de andres. Men paa Island findes et par smaasjøer fremkomne, t. ex. ved udbrudet i 1783 derved, at en lavastrøm spærrer for en dal; der findes paa Island som i Italien sjøer, der udfylder bægeret i kratere; men disse forhold og lignende omstyrter naturligvis ikke den opfatning, at vore sjøer og fjorde i det store og hele er dannelser af samme art.

Men erkjendes dette, da er meget vundet; thi da har man ret til at anvende iagttagelser, som er gjort i et land, paa sjøer og fjorde i et andet, og erfaringer fra et land kan direkte udnytttes i et andet.

Med fjord- og sjødannelsen har øiensynligt andre fænomener sammenhæng. En vel udviklet skjærgaard staar altid i forbindelse med et vel udviklet fjordsystem, saaledes som bedst kan sees langs vor kyst, langs Grønlands saavel som langs de nordligste som de sydligste dele af vestkysten paa det amerikanske kontinent.

Ved siden af disse store forhold er der, saaledes som ogsaa af Nathorst fremhævet, den øiensynligste sammenhæng mellem bækkenerne og den smaakollede overflade, som vi i alle lande iagttager omkring sjøerne, mere eller mindre tydeligt udviklet og vedligeholdt, alt efter bergartens beskaffenhed.

De orografiske forhold er af den beskaffenhed, at de nødvendiggjør en almengjældende forklaring af sjøer og fjorde i Norge, Sverige, Finland, Skotland, Schweiz, Island, Spitzbergen, Grønland, Nordamerika, ligesom af de samme dannelser paa høiere bredder paa den sydlige halvkugle.

Medrette bemærker Tørnebohm\*): *Ramsay* og andre har gjentagne gange fremholdt, at det just er de dele af jorden,

\*) Bind IV, pag. 345.



der engang har været bedækkede af store ismasser, som er rige paa sjøer og fjorde. Dette forhold er og saa paatageligt, at det vanskelig kan drages i tvivl, at jo ikke dannelsen af sjøbassinerne maa staa i en kausalsammenhang med glacialtidens eiendommelige forhold.

*Forudsætningerne i diskussionen.*

Vi vil se, om de forudsætninger, hvorpaa diskussionen tildels hviler, er rigtige.

Dr. Nathorst bemærker\*): »Efter Pümpelly er nu de fleste sjøer, som optage klippebassiner, opkomne derved, at forvittringsresterne er bortførte til et andet sted, og det er herved allerede et bemærkeelsesværdigt faktum, at saavel Sverige som overhovedet alle lande, som er rige paa sjøer (for ei at fæste sig ved saadanne, som optager hulheder i løse jordlag) bestaar, som saa ofte fremholdt, af urformationens bergarter. Dette bliver efter den her omhandlede teori helt naturligt; disse lande har under lange geologiske tidsrum ligget hævet over havfladen og bør saaledes mest af alle vise den sekulære forvittrings spor«.

Hvad der her anføres som et faktum, at saavel Sverige som overhovedet alle lande, som er rige paa sjøer, bestaar af urformationens bergarter, stemmer ikke med min erfaring. Island t. ex. er rig paa sjøer, Gunnlaugssons kart opviser et antal af 170, for ei at tale om alle fjordene, og Island er et meget ungt land, neppe ældre end den tertiære tid.

Schweiz med de tilgrændsende lande, Norditalien, Baiern o. s. v., er rig paa sjøer, der optager fordybninger i de mest forskjellige formationer, som ethvert geologisk kart viser. Men Alperne er ikke gamle, og sjørerne i Baiern til ex. optræder endog i Nagelfluh.

Her i Norge er sjøer almindelige i bergarter tilhørende

---

\*) Bind IV, pag. 288.

urformationen og den siluriske formation, og vore fjorde sætter igjennem gneis og granit ligesaavel som skifere, kvartsiter, konglomerater, labradorstene o. s. v. I Grønland gaar fjorde som Waigattet og Umanakfjorden saavel gjennem urformationens bergarter som gjennem de fossilførende lag fra kridttiden og den tertiære tid og gjennem de yngre mægtige basaltdækker.

Efter dette tør jeg ikke med Dr. Nathorst betragte det som et faktum, at alle lande, som er rige paa sjøer, bestaar af urformationens bergarter.

Sikkerligen medrette sætter Dr. Nathorst sjøernes optræden i forbindelse med landets smaakuperede beskaffenhed; men den bemærkning mod tidligere forklaringer af sjøerne, at de lider af den store feil, at de ikke gjør rede for landets smaakuperede beskaffenhed, og at denne hidindtil ikke har været tilstrækkelig paaagtet som staaende i forbindelse med sjøerne, er neppe berettiget. Allerede længe har den smaakuperede beskaffenhed af overfladen, de saakaldte *roches moutonnées*, været vel kjendt som et eiendommeligt træk ved isskurede lande, og allerede i det første arbeide, hvori Ramsay antyder sin teori om indsjøernes dannelse, er denne landenes smaakuperede (mammillated) overflade omtalt og forklaret som indvirkning af det samme agens som det, der har dannet sjøerne. I dette arbeide: »The old Glaciers of Switzerland and North Wales« heder det, at den tilrandede form af klipperne og skuringerne paa deres overflade, som er frembragt derved, at bræer har flydt over den, er vel kjendt af alle gjennem *Agassiz's* og *Forbes* skrifter. Til bevis for, at de ældre teorier for sjøer ikke, saaledes som Dr. Nathorst paa staar, lider af den store feil, at de ikke gjør rede for den smaakuperede overflade, og til bevis for at de, i modsætning til hvad Dr. Nathorst siger, allerede fra første stund af satte den smaakuperede overflade i forbindelse med sjøerne, hid sætter jeg her et citat af den ovenomtalte bog af Ramsay

fra 1862 pag. 109 og følgende; udtrykkene: »mammillated«, »rounded«, »moutonnées«, vil visseligen erkjendes som svarende nærmest til »smaakuperet«. — Efter at have beskrevet Märjelen-see, fortsætter Ramsay:

»Erosionen af saadanne fordybninger ved is synes ganske analog med den erosion, som udhulede mere fuldkomne klippebassiner, ikke alene sjøer og tjern i almindelige brædale (som dem i Cwm-glas paa Snowdon eller Llyn Cywion over Nant Francon), men ogsaa klippebassiner, som ligger paa høie passovergange og vandskjel, som Todtensee mellem Grimsel og Rhonedalen, eller fremdeles paa det høie land, som tjernene paa nogle af de vilde høisletter mellem Ffestiniog, Nant Gwynant og Conwy-elven; eller paa de engang smaakuperede (mammillated), men nu halvt forvitrede (half-weatherworn) gneisoverflader, hvor et netværk af pytter, tjern og sjøer i snesevis kan sees fra den spidse tind Suilven i Sutherland. Mange af disse bassiner blev som det synes udhulede, da landet ligesom Nordgrønland paa de vildeste klipper nær var bedækket med et udstrakt tæppe af mægtig is, som gik ned under havets nuværende overflade.« —

Hvorledes den ved isskuringen fremkomne overflade forsvinder ved forvitringen, er ogsaa allerede omtalt af Ramsay paa det nævnte sted (pag. 110).

»Den gradvise ødelæggelse af de isskurede (ice-worn) overflader er ogsaa en sag af stor interesse, thi skjønt disse mærker kan staa i lange tider, forsvinder de dog hurtigt i geologisk forstand. Naar torv og løse glaciale masser er fjernede, saa vil de underliggende overflader af lagdelt skifer ofte vise en fuldkommen ispolitur, men, naar de længe har ligget bar, vil den glatte overflade og de finere mærker forsvinde; og skjønt den almindelige tilrundede form staar igjen, saa bliver overfladen ru, og de steiltstaaende lagflader viser sig i det udgaaende i nogen grad takket. Men dybere furer varer ofte lang tid, men ogsaa de forsvinder tilslut,

skjønt det er ikke førend længe, efter at dette har fundet sted, at den almindelige tilrandede form af roches moutonnées ganske er tilintetgjort.

Fænomener af samme almindelige natur kan iagttages hos de eruptive og andre ikke lagdelte bergarter, som en bræ har gaaet henover. Den oprindelige polerede overflade bliver, naar den blottes, ru ved den atmosfæriske desintegration. Men den almindelige form staar igjen og beviser sin glaciale oprindelse, og i intet tilfælde er der nogen fare for, at det erfarne øie forvexler dette med de former, som hos gneissen er frembragt ved sfærisk dekomposition, om hvilken der er skrevet saa meget. Tilslut, efter lang tids forløb, gjør luft, vand og tilbagevendende frost sit arbeide, klippen sprænges efter sine sletter, gaar fra hverandre, stykker falde fra, og efterhaanden antager det hele en uregelmæssig og takket kontur, helt forskjellig fra den glaciale overflade, fremkommet ved den længe fortsatte bevægelse af is, og saaledes gaar det til, at paa selve toppen af en eller anden taarnlignende klippe, hvis sider er bleven sønderbrudt ved alle de mange vintres frost, der vil den, som studerer de glaciale fænomener, dog finde bræens skrift urørt, medens lavere ned paa siderne vil alle spor af isstrømmen for længe siden være forsvundne«.

Det ovenfor anførte citat vil vise, at de ældre teorier for sjøernes dannelse ikke lider af den store feil, at de ei forklarer landets smaa kuperede overflade; allerede i Ramsays første arbeide om sjøerne er denne forbindelse mellem pytter, tjern, sjøer og landets smaa kuperede, moutonnerede, tilrandede (mammillated) overflade tydelig erkjendt og søgt forklaret.

*Argumenter mod erosion ved is.*

Dr. Nathorst bemærker\*): »For en opmærksom iagttager kan det ikke være underkastet tvivl, at denne (landets smaa

---

\*) Bind IV, pag. 288.

kuperede overflade) staar i forbindelse med sjøerne; der hvor bergkollerne er talrigere, er det blot en relativ ulighed, som adskiller de mindre forsænkuinger mellem dem ifra sjøerne, og enhver bergkollle kan siges at være et omvendt billede af, hvad hvert klippebækken er, — den første repræsenterende den negative, den anden den positive side af sagen. Eller« fortsætter han, »med andre ord, den kraft, som har formaaet at udhule bækkenerne, har ei været istand til i lignende grad at paavirke bergkollerne. Allerede heraf bliver det tydeligt, at denne ulighed ei kan bero paa isens denuderende evne. Var denne, hvad den virkelig udgives for, skulde ganske sikkert ingen af disse efter sin udstrækning saa ubetydelige bergkoller staa igjen, og en saadan til yderlighed ujævn indvirkning paa berggrunden af en rent mekanisk kraft er forøvrigt aldeles utænkbart«. Dette argument mod bræernes erosion er gammelt, fremsat af Marchison i 1864, og gjendrevet af Ramsay kort efter.

Beviset indeholder feil ogsaa imod den formelle logik. Der sluttes nemlig i virkeligheden saaledes: da bergkollerne staar igjen, saa formaar isen ikke at denudere bergkoller, hvilket er en feil imod den sætning i den formelle logik, der siger: man kan ikke slutte fra ikke at være til ikke at kunne være. Et eksempel vil vise, hvor urigtig slutningen rent formelt er: Da der langs St. Gotthards tunnelens sider findes talrige ubetydelige fremspring og fordybninger, og da den kraft, som har formaaet at frembringe fordybningerne, har ladet fremspringene blive staaende, saa kan mineringen ikke være saa stærk en kraft, som den sædvanlig udgives for, og en saadan til yderlighed ujævn indvirkning paa berggrunden af en rent mekanisk kraft er aldeles utænkelig. Paa lignende maade kan man af de ujævnheder, som findes i et elveleie, slutte, at elvene ingen eroderende virkning har o. s. v.

Reelt er slutningen feilagtig, fordi den er baseret paa

den forudsætning, at en mekanisk kraft ikke kan frembringe en yderst ujævn overflade. Det maa her vel erindres, at den form, som overfladen antager under indflydelsen af den glacial erosion, vil være afhængig af flere faktorer, saaledes:

- af tilgangen paa skuringsmateriale,
- af skuringsmaterialets beskaffenhed,
- af isstrømmens bevægelseshastighed,
- af bergartens haardhed og fasthed, af dens lagflader, af dens sletter o. s. v.

Hvis vi havde et fuldstændigt homogent fjeld med horisontal overflade, med fuldstændig jævn og ensartet tilgang af ensartet skuringsmateriale, og der over samme bevægede sig en isbræ af samme mægtighed og med samme hastighed, saa vilde den denuderende indflydelse blive den samme over hele fladen; men da disse betingelser i naturen langt ifra tilfredsstilles, saa maa resultatet af den mekanisk virkende kraft blive yderst ujævn, hvad vi ogsaa i naturen finder, idet lagenes stilling, granitens bækning, sletter og afløsningsflader, bergarternes ulige haardhed o. s. v. viser sig at øve sin indflydelse paa den glacial erosion, saaledes som den foreligger iøinefaldende i vore fjorde, i vore tjern og sjøer og i landets smaa kuperede overflade.

»Isens indvirkning paa den faste berggrund, hvor denne bestaar af urberg, turde derimod i de fleste tilfælde at være forholdsvis ubetydelig og blot bestaa i overfladens afrunding, slibning og furning«, bemærker Dr. Nathorst\*). Men overfladens afrunding er netop det eiendommelige træk ved vore landes smaa kuperede overflade, og naar denne afrunding tilskrives isen, saa synes det dog allerede herved at erkjendes, at et væsentligt træk, maaske det væsentligste, skyldes isens erosion.

Dr. Nathorst sees videre at erkjende, at fodbrede furer

---

\*) Bind IV, pag. 289.

er fremkomne ved isens erosion. Det heder nemlig\*): »Og man ser jo ofte endog de smaleste smaadale mellem bergkollerne bære spor af isens virksomhed i form af fodbrede furer i bergvæggenes sider, ja til og med under overhængende bergvægge«. Men erkjendes *fodbrede* furer som spor af isens virksomhed, saa synes derved *tillige* nødvendigvis isens eroderende virksomhed paa fast fjeld at være erkjendt. Naar derhos bergkollernes afrunding tilskrives isens virksomhed, saa er der paavist et agens, som baade eroderer og tilrunder, og som utvivlsomt har været virksomt i vore lande, og det synes da lidet motiveret at opstille en teori om sekulær forvitring med tropisk vegetation og rigelig og varm regn for at forklare vor isskurede overflade. Alene den omstændighed, at en fodbred fure kan dannes ved isskuring, viser jo, at denne kan virke yderst ujævnt, og forud for de furer, som vi iagttager, har der jo under den lange istid gaaet mange lignende, og der forlanges da intet andet end tid forat frembringe en overflade, som vi nu ser den.

Dr. Törnebohm tager ligesom Dr. Nathorst isen til hjælp ved forklaringen af sjøerne. Saaledes som før berørt, fremhæver han stærkt, at sjøbassiner maa staa i en kausalsammenhæng med istidens eiendommelige forhold. Men om Ramsays opfatning af isens evne til erosion bemærker han, at den i senere tid, og just af de fornemste gletscherkjendere, er blevet bestandig ivrigere bestridt. Dr. Törnebohm vil sikkerligen være den første til at erkjende, at geologiske spørgsmaal afgjøres ved iagttagelser og argumenter, og ikke efter autoriteter, og jeg vil derfor ikke ved henvisning til litteraturen undersøge, om de fornemste gletscherkjendere staar paa den ene eller den anden side. De argumenter, som anføres, skal vi nærmere undersøge. Der siges\*\*): »Man har i mange tilfælde bestemt konstateret, at en bræ har gaaet frem over løse afleininger

\*) Bind IV, pag. 403.

\*\*\*) Bind IV, pag. 346.

uden synderligen at forstyrre (rubba) dem, saafremt de forud laa jævnt udbredte foran dem. Var de igjen sammenhobede i volde og høier, saa skjøves de tilside af isen; den virker planerende paa sit leie, men udgraver det i almindelighed ikke, hvad der bedst vises derved, at isen har gaaet frem over Skaanes og Nordtysklands diluviale sand- og lerlag uden at borttage dem«. Ogsaa dette argument mod isens erosion er fremsat af Murchison i 1864 og gjendrevet af Ramsay. Selve iagttagelsen, at en bræ kan gaa frem over løse masser, er sikker nok, og i virkeligheden beror isens eroderende evne derpaa, at løse stene, dels under isen, dels ligetil indfattede i samme, deltager i nogen grad i dens bevægelse. Disse stene er selve skuringsmaterialet; thi is alene eroderer ikke. Men at den argumentation, som ovenfor er ført af Dr. Törnebohm, neppe er holdbar, lader sig paavise. Man kan nemlig paa samme maade bevise, at elven ingen eroderende indflydelse har paa underlaget: Det er i mange tilfælde bestemt konstateret, at en elv gaar frem over løse afleininger uden synderligt at forstyrre dem, hvis de forud laa jævnt udbredte foran samme; og det samme ræsonnement, i kraft af hvilket det søges bevist, at isen ikke eroderer, fordi den har gaaet over Skaanes og Nordtysklands diluviale sandlag, kan benyttes til at bevise, at Nilens vande ingen eroderende indflydelse udøver, fordi de strømmer over de løse masser i sit eget delta.

Hvad her er glemt, er den omstændighed, at bræerne ligesom elvene har sit erosionsgebet og sit afleiningesgebet. Hvad bræen slæber med sig i grundmoræner, midtmoræner og paa sin ryg, samles, torsaavidt det ikke er opslidt og ført afsted til elvene, ved bræens nederste ende, og ved enkelte meget betydelige bræer kan den nederste del være i den grad bedækket med og omhyllet af bræens eget detritus, at man ikke ved, om man staar paa bræen eller paa morænen. At et saadant stadium i isbræernes mekanik kan indtræde, er



ikke vanskeligt at forstaa. Aftager tilførselen af is ifra høiderne, saa vil bevægelsen i den nedre del aftage eller ophøre, og med den vil den skurende evne aftage eller ophøre; men tilførselen af skuringsmateriale vedvarer fra de øvre dele af bræen, der fremdeles bevæger sig nedover, og følgen heraf vil være, at den nederste del af bræen vil blive begravet i sine egne løse masser. Som et godt eksempel kan anføres isbræen *Assakak* i Nordgrønland i 1875 og flere bræer i Grønland. Bræen her laa helt begravet i sine egne løse masser, men dette er intet bevis for, at den ikke eroderer, og om vi til en tid finder enden af en bræ ridende paa eller skjult under sin egen detritus, saa er dette intet bevis for, at den altid vil ligge slig, og at den altid har ligget slig; thi forandringer indtræder, ligesom en elv i flomtider river med sig den sand og slam, som den til andre tider roligt strømmer henover. At dette ikke blot er ræsonnement, kan vises ved direkte iagttagelse. Isbræen *Sorkak* paa sydsiden af Umanakfjorden var i 1850, da Rink undersøgte den, med sin yderste rand ganske forsvunden under grus og stene, og først flere hundrede alen fra stranden saaes den faste is at skimte frem af denne bedækning. 25 aar senere, da jeg besøgte denne bræ, gik den med 25 meters høide og med en mægtig moræne ud i havet. Men før Rink kom der i 1850, havde bræen, efter Grønlændernes beretning, gaaet ud i sjøen og slaaet revner i isen om vinteren ved sine kalvninger.

At bræerne ligesom elvene har et gebet for affleining, er nødvendigt. Fra Sverige og Finland førtes der enorme masser af blokke, stene, sand og grus ud over den nord-europæiske slette. Efterhaanden som isstrømmen kom længer sydover, aftog den i mægtighed, idet den smeltede bort ved de grændser, den naaede paa den nordeuropæiske slette. Da flodernes løb i Tyskland maa have været i det hele i modsat retning af isbræernes bevægelse, vilde altsaa heller ikke disse kunne føre de løse masser direkte bort fra isen. Hvilken eroderende

kraft end isen besad, var det omsider nødvendigt, at de løse masser maatte tiltage i mægtighed nær isens grændser, og at bræens egen udfyldning blev stærkere end dens erosion.

Om bevægelsen af ismasserne bemærker Dr. Törnebohm\*: »Bevægelsen i isens underste dele maa have været yderst langsomt og nogen storartet transport af sten og grus under isen kan neppe antages at have fundet sted; bundmorænerne omkring grændsen for isens største udbredelse maatte nemlig ellers være langt mægtigere og mere sammenhængende end de i virkeligheden er«. Desværre er jeg ikke sikker paa, om jeg har forstaaet Dr. Törnebohms tanke paa dette sted. Grændserne for den svenske og finske ises største udbredelse ligger jo paa den store nordeuropæiske slette. De tyske geologers geschiebelehm opfattes, saa vidt jeg ved, almindeligvis som grundmorænen. Men geschiebelehmet og de andre glaciale dannelser strækker sig jo her over 2 millioner kvadratkilometer, og mægtigheden naar jo tilsammen 100, 200 jo op til 400 fod for alle disse glaciale dannelser tilsammen.

»Langsefter de laveste sænkninger, i hvilke de vældigste isstrømme samledes, kunde dog bevægelsen være relativt betydeligt, hvilket vises derved, at glacialfurerne saavel paa Sveriges østre som vestre kyster er uden sammenligning større end i det indre af landet\*\*). Den her omtalte iagttagelse, at furerne er større eller maaske rettere bedre vedligeholdte langs kysterne end i det indre af landet, synes i det hele ogsaa at bekræftes i Norge i fjordlandskaberne, men heraf tør man neppe direkte drage den slutning, at bevægelsen har været relativt betydeligere her end i det indre af landet. Først viser den direkte iagttagelse, at en isbræ i en grønlandsk fjord kan bevæge sig med mindst 20 gange saa stor hastighed som i en anden nærliggende fjord; isstrømmenes hastighed er visseligen i hver dal og fjord afhængig

\*) Bind IV, pag. 349.

\*\*\*) Bind IV, pag. 349.

af de masser is, som trykker paa. Dernæst maa man erindre, at landet siden istiden har hævet sig flere hundrede fod, hvoraf tør sluttes, at de striber, som vi nu iagttager nær havets niveau, en lang tid efter isens forsvinden har ligget under havet og derved er blevet beskyttet mod atmosfæriernes indvirkning. De særdeles iøinefaldende striber, som vi iagttager nær vore kyster, behøver derfor ikke at antyde, at bevægelsen ved kysterne har været betydeligere. Endelig maa det erindres, at de furer og striber, som vi ser, visseligen er de sidste mærker, som de hensmeltende ismasser efterlod sig.

Dr. Törnebohm anfører et citat af Peschel og opkaster med dette som grundlag tvivl om bræernes daldannende kraft; det forekommer mig imidlertid, at han her ad ræsonnementets vei søger at modbevise, hvad naturen selv lægger aabent tilskue. Det heder nemlig hos Peschel, at under et isdække er alle de faktorer overordentlig svækkede, som er af betydning ved forvittringsprocessen: nemlig temperaturvexling med følgende vexling af udvidelse og sammentrækning. Men hvis vi, det være i Norge, i Schweiz, paa Grønland eller paa Island, sammenligner bræelvenes vand med det almindelige bergvand eller bygdevand, saa finder vi, at de sidste i alle disse lande er rene og klare, undtagen i flomtider, medens brævandet er blakket, melket, grumset, ja paa Island dybt kaffebrunt og chokoladefarvet, og forskjellen er i den grad paatagelig, at, medens vi i de almindelige bergelve ofte kan fylde store balloner med vand uden at kunne paavise synderligt spor af mekanisk forurensning, saa vil man i en islandsk bræelv faa et temmelig betydeligt sediment allerede i et almindeligt glas vand, og ved de islandske bræer, der hviler paa palagonittuf, er vandet saa grumset, at det er modbydeligt at drikke af det. Det forekommer mig, at naturen her tydeligt nok fortæller, at der under bræerne foregaar et ganske anderledes betydeligt arbeide end paa de

dele af landet, som ligger fri for is, og dette forhold i naturen vil altid være af større betydning end de resultater, hvortil man kommer ved at ræsonnere over tingen. Men derhos er Dr. Peschels ræsonnement neppe rigtigt. Sagen er, at under en isbræ foregaar vexlinger i temperatur netop omkring vandets frysepunkt, og netop denne temperaturvexling er af overordentlig stor betydning for spørgsmaalet om erosionen. I de af sprækker gjennemsatte bræer silrer der stadig vand af 0 grader ned paa det underliggende fjeld og meddeler dette i overfladen sin temperatur. Men i de egne, hvor bræer optræder, varierer luftens temperatur netop hyppig over og under 0 grad, og hver gang temperaturen synker under 0, vil vand under bræen fryse. Igjennem sprækkerne i bræen vil nemlig en veirvexling eller ventilation foregaa ligesom i en grube. Men den indflydelse, som frysende vand har paa fast fjeld, er enhver, som har besøgt høifjeldet, bekjendt, og de høieste tinder er helt søndersprengte ved frost. Men under bræen foregaar ei alene denne sprengning ved frysende vand, der søger ind i sletter og sprækker, men bræen fører det løsbudte afsted, benytter det som skuringsmateriale og blotter samtidigt nyt fjeld for ny sprengning og ny skuring. Hovedmassen af den sten, som ligger under bræen, er nemlig ikke, saaledes som sædvanlig antaget, faldt ned fra fjelde, der rager op af isen. Ved bræer, som gaar ned i trange fjorddale, kan en saadan hypothese opstilles, men ved de brede skjoldformede islandske bræer, der gaar ud mod vidtstrakte stensletter, findes ofte ingen fjelde, der rager op af isen, og som kan bringe sten til overfladen, men ikke desto mindre er disse bræer rigeligt forsynet med skuringsmateriale.

Men idet frysende vand under bræen virker sprengende, er selvfølgelig bergartens beskaffenhed, dens lagflader, dens sletter, sprækker, afløsningsflader, bænke o. s. v. for en væsentlig del bestemmende for sprengningsarbeidet, idet alle disse flader baade er svaghedslinier og tillige steder, hvor vandet

lettest faar adgang, og ræsonnementet her bekræfter, hvad naturen viser, nemlig at bergarternes svaghedslinier spiller en rolle under det energiske arbeide, der foregaar under de naturens mærkværdige værksteder som kaldes isbræer.

*Om Vetterns alder.*

*Dr. Linnarsson* har fremsat den tanke, at Sveriges konfiguration og saaledes ogsaa sjøbassinerne sandsynligvis er af ældre dato end istiden, maaske for største delen hidrørende fra den prekambriske tid. *Dr. Nathorst* gjør den bemærkning, at udtrykket den prekambriske tid bør ombyttes med begyndelsen af den kambriske. Tanken om, at vore landes konfiguration skulde være saa gammel, at den gik tilbage til begyndelsen af den kambriske tid, er neppe holdbar; thi selv de høieste dele af den norsk-svenske halvø, Jotunfjeldene, eksisterede ikke i den kambriske tid. Siluriske forsteninger er fundne helt op til en høide af 4000 fod over havet i Hulbjerget; store felter af graniter, porfyre o. s. v. er af postsilurisk alder, og der bliver da neppe rum for den tanke, at sjørerne i det hele er af kambrisk alder; thi end ikke de bergarter, hvori mange af sjørerne ligger, eksisterede i den kambriske tid.

*Dr. Nathorst* mener, at det i det mindste for Vetterns vedkommende er bevisligt, at den eksisterede før den kambriske tid, og han henviser i denne forbindelse til et arbeide: »Om de ældre sandstens- og skifferbildningarne vid Vettern\*»). Det omtales her, at der paa øer i Vettern og langs bredderne forekommer en formation — Visingsøformationen — af sandsten- og skiferdannelser, hvilke optræder saaledes, at et blik paa kartet turde være nok til at vise, at formationen har afsat sig i et bækken, temmelig nær svarende til den nuværende Vettern, hvilken saaledes allerede i den kambriske tid i det mindste delvis eksisterede.

\*) *Geol. Fören. Forh.* Bind IV, pag. 421.

Jeg vil føie nogen bemærkninger til de slutninger, som Dr. Nathorst her drager af sine observationer.

Naar vi i og omkring Vettern finder paa mange øer og langs bredderne en lagdelt formation af samme eller lignende beskaffenhed paa de forskjellige steder, saa slutter vi, at disse af samme formation bestaaende øer og bredder engang har udgjort et sammenhængende hele, af hvilket øerne nu er rester eller ruiner. Det forekommer mig derfor, at Dr. Nathorst har for det første godtgjort, at forsaavidt Vettern har existeret som et afsluttet bækken i den kambriske tid, saa var dette bækken blevet fyldt under Visingsøformationens dannelse, sandsynligvis før den siluriske tid. Selv om man altsaa kan paavise, at der før den siluriske tid har været et afsluttet bækken i den egn, hvor Vettern nu ligger, saa har man derved ingenlunde forklaret, hvorledes den *nuværende* vandfyldte Vettern er blevet til. At denne i sin nuværende form er postsilurisk, fremgaar jo allerede af Dr. Nathorsts kart, der viser, at den del af Vettern, som gaar ind til Motala og Vadstena, danner bugter i kambrisk-siluriske formationer. Betydningen af, at Vetterns bugter gaar ind til Motala og Vadstena, har allerede Dr. Nathorst erkjendt, idet han siger, at disse bugter synes tilkomne senere.

Dr. Nathorsts iagttagelser synes at styrke den mening, som Dr. Törnebohm har gjort gjældende, at ældgamle bækken, som maatte have existeret, er blevne udfyldte.

Mægtigheden af Visingsøformationen, hvor den er bedst udviklet, er efter Dr. Nathorst mindst 850 til 1000 fod, medens Vetterns maximumsdybde er 400 fod. Allerede dette synes mig at antyde, at det gamle bækken, som Dr. Nathorst forudsætter omkring Vettern, maa have været dobbelt saa dybt som det, vi nu kalder Vettern, og hans iagttagelser synes mig saaledes at godtgjøre, at forsaavidt som der, omtrent hvor Vettern nu ligger, i begyndelsen af den kambriske tid var et bækken, nogenlunde af Vetterns størrelse og mere end dobbelt

saa dybt som Vettern, saa er dette bækken allerede før den siluriske tid udfyldt.

Medrette bemærker Dr. Nathorst: »Hvis man derhos ser paa mægtigheden af det sediment, som ophobedes under de kambriske og siluriske perioder, saa faar man et begreb om den uhørte forvitring, for hvilken den azoiske berggrund allerede ved den tid har været udsat«. Den her anførte sandhed er iøinefaldende og oftere fremholdt, og den kan ikke noksom indprentes, da den er et uimodsigeligt bevis for denudationens betydning og for tidens længde. Men naar saa Dr. Nathorst tilføier, at det, at ville fornægte dannelsen af sjøer i denne tid, turde være helt og holdent at overse alle fakta og sandsynligheder, da forekommer det mig, at disse stærke udtryk ikke er motiverede; thi hans egne iagttagelser viser, og den almindelige teori for det rindende vands virksomhed fordrer, at sjøer, som maatte have existeret ved begyndelsen af den kambriske tid, udfyldtes under en saa langvarig og voldsom denudation som dannelsen af de mægtige kambriske og siluriske formationer forudsætter. Det rindende vand kan under gunstige omstændigheder frembringe en enorm denudation, som t. ex. de amerikanske cañons viser, men det rindende vand kan ikke danne nogen dyb sjø. Det er derfor meget muligt, at en enorm erosion og denudation ved vand kan være foregaaet i den kambriske og siluriske tid, uden at denne erosion gav anledning til dannelsen af en eneste sjø, som vi t. ex. ser, at Spaniens floder strømme gennem dale uden sjøer. Selv om man med Dr. Nathorst antager, at den sekulære forvitring frembringer bækkener, saa behøves der et agens til at tømme dem, hvortil Dr. Nathorst anvender istidens bræer, men idet han optræder som en bestemt modstander af ældre istider, vil det skorte paa midler til at faa de preglaciale sjøer tømt. Uagtet jeg ingenlunde tør benægte muligheden af, at der før istiden fandtes sjøer i Sverige og Norge, saa meget mindre, som vi ser, at der t. ex. i Palæstina og i andre

ikke isskurede lande kan forekomme indsjøer med en fra vore sjøers forskjellig oprindelse, hvorom senere, saa skulde jeg dog være tilbøielig til at antage, at disse sjøer var overmaade faa, og vi kjender ingen preglaciale ferskvandsforsteninger i de nu paa indsjøer rigeste egne; beviset for, at en norsk eller svensk sjø existerede som en ikke tilfyldt sjø ved istidens begyndelse, er neppe leveret.

Dr. Törnebohm har i sin diskussion, som jeg synes med held, paavist, at det neppe kan antages, at der ved begyndelsen af istiden fandtes vandfyldte klippebassiner, en tanke, som jeg i 1872 i mit første arbeide om sjøerne har fremholdt\*).

Dr. Nathorst bemærker om Vettern: Den er *enten* ikke fuldstændig blevet fyldt af de palæozoiske formationer og har siden stadig været sjø *eller* og er dette bækken under istiden blevet tømt.

Med Törnebohm mener jeg, at den maade, hvorpaa Visingsøformationen optræder, viser, at det antagne kambriske Vetternbækken, hvilket ikke er identisk med det nuværende, har været udfyldt af Visingsøformationen. Dr. Nathorsts andet alternativ maa derfor antages, men med modificationer. Visingsøformationens bergarter havde nemlig sikkerligen før istiden antaget den samme haardhed og fasthed, som de har nu, idet de da existerede som sandstene og skifere. Følgelig forlanger det andet alternativ ikke en udtømmen af løse masser ved isbræer, men en erosion af sandstene og skifere ved is, hvilken erosion ogsaa virkede paa de siluriske formationer, der har udfyldt bugterne ved Motala. Hvis Dr. Nathorst vil have det kambriske Vettern rensat under istiden, saa maa han antage, ikke at sjøen er tømt for løse masser, men at sjøen er eroderet i sandsten og skifer.

Disse forhold her ved Vettern, at yngre formationer let-

\*) Die glaciale Bildung der Fjorde und Alpenseen in Norwegen. Pogendorffs Annalen 1871.



tere falder som offer for erosionen end de azoiske bergarter, er hverken noget for Vettern eiendommeligt eller nogen ny tanke, om end den detaillerede eftervisning af Visingsøformationens udbredelse er ny. Det er nemlig tilfælde med de fleste store svenske og norske sjøer, at rester af silur optræder i deres nærhed og antyder, at større dele af denne formation er forsvundne. Det er tilfælde med Vennern, Storsjø, Siljansjø i Sverige, med Mjøsen, Tyrifjord, Randsfjord, altsaa med de største sjøer i det sydlige Norge. De bergarter, som maatte have fyldt en ældgammel fordybning eller, om man vil, de ældgamle fordybninger og havbugter, hvori den siluriske formation i sin tid afsattes, har lidt meget ved erosionen, da de siluriske bergarter omkring disse sjøer er lidet faste og haarde; men at isen ved sin erosion ikke er bunden til bestemte formationer ved den enkelte sjø, er tydelig nok, thi Mjøsen gaar saavel gjennem bergarter af Silur- og Sparagmit-formationen som gjennem grundfjeld og yngre granit, og vore andre sjøer er ogsaa eroderet i de forskjelligste bergarter ligesom fjordene.

---

I et nyt arbeide: »Några ord om Visingsøformationen« har Dr. Nathorsts anskuelser om Vettern undergaaet en del forandringer, efter at det er paavist, at der er en forrykning tilstede mellem Visingsøformationen og Urformationen\*).

Den slutning, hvortil Dr. Nathorst kom i sit første arbeide: nemlig at Visingsøformationen har afsat sig i et bækken, temmelig nær svarende til det nuværende Vettern, hvilken saaledes existerede i det mindste delvis allerede under den palæozoiske tid, denne slutning anser han nu for urigtig.

---

\*) Dette nye arbeide (i januarheftet 1886 for Geol. För. Förh.) udkom først, efterat nuværende opsats var sendt til trykning. De fremkomne oplysninger modificerer anskuelserne om de forandringer, som formationerne har undergaaet omkring Vettern, hvorfor her er tilføjet de følgende bemærkninger.

Han anser det videre nu for usandsynligt, at en formation, som i en saa fjern fortid afsattes i et bækken af Vetterns størrelse, og som ikke ved bedækning blev beskyttet mod erosion, skulde i vor tid findes i behold.

Da der imellem Visingsøformationen og Urformationen er paavist en forrykning, saa antager han nu en kambrisk Vettern senere end Visingsøformationen, og fremkommet ved to forrykninger, idet landet mellem disse to forrykninger sank. Denne kambriske Vettern var altsaa en lokal forsækning, der havde de sunkne dele af Visingsøformationen til bund og Urformationen med de ikke sunkne dele af Visingsøformationen til vægge\*). »Men disse plateauer af Visingsøformationen,« fortsætter Dr. Nathorst, »paa begge sider eroderedes bort lidt efter lidt, og den kambriske Vettern forsvandt. Derpaa afsattes de kambrisk-siluriske lag over Vetterns forrige plads, men blot for i sin tid at borteroderes derifra. Ved fortsat sænkning og erosion af den gamle kambriske Vetternbund opkom slutteligen det nuværende bækken«.

Uagtet de nye iagttagelser leverer vigtige bidrag til de arkitektoniske forhold, forekommer det mig dog, at dannelsen af det *nuværende* Vetternbækken ingenlunde er udredet.

Det antagne gamle kambriske Vetternbækken, fremkommet ved forrykning, forsvandt jo helt og holdent ved erosion, før de kambrisk-siluriske lag afsattes, ja blev endog begravet under disse lag, og den gamle kambriske bækkenform er altsaa allerede meget tidligt helt ude af sagaen.

Vistnok medrette lader Dr. Nathorst nu de kambrisk-siluriske lag forsvinde ved erosion, og hertil behøves ikke andre kræfter at forudsættes end den almindelige denudation. Men

\*) Paavisningen af en forrykning mellem Visingsøformationen og Urformationen er vistnok sikker nok, men at der ved forrykningen eller forrykningerne i den kambriske tid fremkom et *vandsyldt bækken*, synes mig ikke tilstrækkelig godtgjort. Dette maatte i tilfælde være en sø med geologiske forhold i lighed med det Døde Hav, hvorom mere senere.

det staar endnu tilbage at gjøre rede for fremkomsten af det *nuværende* Vetternbækken, og herom ytrer Dr. Nathorst: »Ved fortsat sækning og erosion af den gamle Vetternbund opkom slutteligen det nuværende bækken«.

Her kan ikke uden grund, med den ældre diskussion for øie, opkastes det spørgsmaal, hvilken den kraft var, som eroderede den gamle Vetternbund. Teorien om den sekulære forvitring og senere rensning ved bræer kan jo efter Nathorst ikke anvendes paa Vettern. Erosion ved vand kan ikke finde sted paa Vetterns bund, thi vandet er jo her stillestaaende og eroderer derfor ikke.

Efter den glaciale teori er dannelsen af det nuværende Vetternbækken forstaaelig. Hvis vi, med Dr. Nathorst, antager de kambrisk-siluriske lag fjernede ved erosion (før eller under istiden), saa vil der ligge aaben for den glaciale erosion: Urformationen paa forrykningens østre side, Visingsøformation paa den vestre. Af disse to formationer vil den sidstes bergarter yde mindst modstand mod erosion, da bergarterne er mindst haarde og faste. Derfor resulterede her et bækken. Det nuværende bækken er altsaa, i modsætning til det gamle formodede Vetternbækken, ikke direkte dannet ved forrykningen, men ved erosion paa forrykningens vestside, da bergarterne her ydede den mindste modstand. Og saa vigtig er denne faktor, at vi med andre erfaringer for øie tør antage, at hvis Visingsøformationens bergarter havde været fastere og haardere end grundfjeldets, saa vilde hin formation, selv om den efter forrykningen i den kambriske tid laa forholdsvis lavt, nu staa frem som en ryg, og vi vilde have haft en høideryg, hvor der nu er en sjø\*«.

Lignende betragtninger, som de Dr. Nathorst har gjort gjældende med hensyn til Vettern, vilde sikkerligen kunne anvendes paa nogle norske bækkener. Nogle af de største

---

\*) Sammenlign figurerne 9 og 10 i Nathorsts afhandling bind 8, pag. 15

dislokationer, vi kjender her, gaar imidlertid over dalfører og er i den grad jævnlagt med den almindelige overflade, at elvene strømmer roligt hen over dem, ja de gaar tvært over indsjøers længderetning, saaledes som jeg har paavist i et arbeide betitlet: »Forsøg paa en geologisk diskussion\*)«. Overhovedet er der neppe noget studium, der i den grad bidrager til en direkte erkjendelse af erosionens betydning end netop undersøgelsen af sikre dislokationer, og de geologer, der begynder med at søge efter forrykninger ved dale, fjorde og sjøer, vil efter et samvittighedsfuldt studium af de forrykningerne, de maatte finde, komme til erkjendelsen af en erosion ofte større end den, som er nødvendig forat istandbringe bækkenerne. At deslige forrykninger lokalt kan indirekte spille en rolle i landets konfiguration, idet de bringer bergarter af forskjellig fasthedsgrad op imod hverandre, vises bedst ved Vetterns eksempel, saaledes som denne er fortolket i Nathorsts sidste arbeide. Der er, mig bekjendt, kun to steder, hvor forrykninger direkte giver sig tilkjende i overfladen, nemlig ved Þingvellir paa Island og ved det Døde Hav i Palæstina, saaledes som senere omtalt; paa begge steder er forrykningerne unge.

Hvor stor den erosion er, som den geologiske arkitektur omkring Vettern maatte forlange i ældre og i yngre perioder, kan jeg ikke udtale mig om, saa meget mindre, som jeg ikke har studeret denne sjøs omgivelser. Men i sin almindelighed tør det vistnok siges, at Dr. Nathorsts antagelse af en særdeles betydelig erosion til de forskjellige tider er i overensstemmelse med iagttagelser af forskjellig art. Erosionens betydning i det hele synes mig ikke at komme til sin ret hos de fleste geologer; det, som maa antages at være forsvundet, er, som rimeligt kan være, ikke ofret den opmærksomhed, som det, der staar tilbage, og specielt i vore

---

\*) Archiv for Math. og Naturv. 1881.

lande, hvor dybe dale og store fjorde og sjøer ligger i de fasteste bergarter, har modstanden mod antagelsen af en betydelig erosion været ikke liden. Det, som vore landes overflade lærer, har efter min mening længe været en lukket bog for de fleste geologer.

Ad de forskjelligeste veie kommer vi til det resultat, at erosionens arbeide, ved vand, ved forvitring, ved is o. s. v., har været enorm til forskjellige tider: De mægtige formationer forudsætter en enorm erosion af ældre fjeld, som har leveret materialet til de yngre dannelser; formationernes udbredelse i adskilte dele og lapper forudsætter, at store dele er faldt som offer for erosion og denudation; gamle konglomerater af stor udbredelse og mægtighed forudsætter en ødelæggelse, der i det mindste svarer til konglomeraternes eget kubikindhold\*); fjeldenes høider peger hen paa, at de selv kun er rester eller ruiner af store plateauer\*\*); gamle dislokationer beviser en erosion paa tusener af fod\*\*\*), og fjordenes, dalenes og sjøernes udbredelse, forekomst og form forudsætter en erosion, for hvilken dybderne i regelen angiver minimum.

Bergarternes beskaffenhed, lagflader, bænking, forrykninger o. s. v. har udøvet en indirekte indflydelse ved at bestemme retning, dybde og art af erosion, men selve formen af landets overflade, efterat de sedimentære bergarter havde hævet sig over havet, og efterat de store felter af eruptive eller plutonske bergarter var blevet til, skyldes den senere erosion, og denne store sandhed bestyrkes desto mere ved den detaillerede undersøgelse, jo mere indgaaende denne er, og jo mere opmærksomheden henvendes ei alene paa de

---

\*) Sammenlign: »Studier over konglomerater«. Archiv f. Math. og Naturv. Bind VI, 1881.

\*\*\*) Sammenlign: »Om fjeldenes høider«. Turistforeningens aarvog f. 1880.

\*\*\*\*) Sammenlign; »Forsøg paa en geologisk Diskussion«. Arch. for Math. og Naturv. 1881.

endnu forhaandenværende lag, men ogsaa paa dem, som er forsvundne.

*Argumenter mod Dr. Nathorsts teori om den sekulære forvitring.*

Kan vi virkelig antage, at vore landes smaa kuperede overflade, saaledes som den ligger der tilrundet, sribet, poleret, skyldes væsentlig en sekulær forvitring under en tropisk vegetation og med varm og rigelig regn?

Hvis denne smaa kuperede overflade kun optraadte inden en gruppe af bergarter som til eksempel inden den azoiske formations feldspathrige bergarter eller inden graniter, saa vilde dette være en antydning til, at bergartens sammensætning spillede den væsentligste rolle som betingelse for overfladens konfiguration. Men den smaa kuperede overflade er et eiendommeligt træk ved det faste fjeld, enten dette bestaar af unge eller gamle bergarter, enten de er feldspathrige eller feldspathfattige. De kan iagttages paa Urformationens bergarter og paa graniter, ligesaavel som paa konglomerater og grønstene, gabbroer, porfyre, kvartsiter, skifere af alle aldere og af den mest forskjellige sammensætning, og den findes paa Færøernes og Islands yngre doleriter, hvor overfladen er bevaret siden istiden. Dette synes at vise tydeligt, at ikke bergartens kemiske eller mineralogiske beskaffenhed er en betingelse for en kuperet, moutonneret overflade. Hvad der her er sagt, staar naturligvis ikke i strid med den kjendsgjerning, at de fastere bergarter, som grønstengange, viser en smukkere og tydeligere tilrundet overflade end til eksempel de skifere og kalkstene, gennem hvilke de sætter op, og som lettere falder som offer for den senere denudation.

Men ligesom den smaa kuperede overflade optraeder paa bergarter af den forskjelligste kemiske og mineralogiske sammensætning og paa bergarter af den forskjelligste alder, saaledes viser sig ogsaa i det mindre blokke af de forskjelligste

bergarter i konglomerater afslebet i lige grad paa de moutonnerede overflader.

De af et haardt og meget fast konglomerat bestaaende Sulenøer ved Sognefjorden viser en i høi grad smaa kuperet overflade. Blokke af de forskjelligste bergarter indtil 2 m i diameter er skaarne over som med en kniv og viser sine gjennemsnit paa den moutonnerede overflade. Hvis en forvitring her havde spillet hovedrollen, vilde blokke af kvarts staa frem, medens feldspathrige blokke vilde være fortærede, men det viser sig her tydelig nok, at den smaa kuperede overflade er resultatet af en *mekanisk*, ikke en kemisk kraft. Thi naar blokke af grønne skifere, grønstene, kvartsiter, gneiser, graniter, glimmerskifer, saussuritgabbro o. s. v., er overskaarne og lige afslebet i overfladen, da er dette et bevis for, at en mekanisk kraft har været virksom. Paa sine steder, inden konglomeratet, har den postglaciale kemiske denudation forstyrret den glaciale overflade, og da staar enkelte blokke af faste bergarter frem i overfladen.

Hvis denne smaa kuperede overflade, som vi i vort land iagttager ved alle vore sjøer og fjorde, hvor fjeldet har holdt sig siden istiden, hidrørte væsentlig fra en sekulær forvitring, da skulde vi i det store i alle bergkollernes beliggenhed og længderetning ikke finde noget bestemt forhold til den retning, i hvilken isstrømmen har bevæget sig. Men det er et yderst paafaldende træk ved disse koller, at de viser sig orienteret med hensyn til isstrømmens retning, saa at man, om man ser i friktionsstribernes retning, ser i bergkollernes længderetning og i »stødsidernes« længderetning.

Men erkjendes dette, at bergkollernes længderetning i det smaa kuperede terræn falder i det hele og store sammen med friktionsstribernes retning, saa er det herved antydet, at den mekaniske kraft, der har slebet overfladen, ogsaa har meddelt kollerne deres langstrakte form. At denne form forøvrigt modificeres paa mangfoldig vis, saavel efter berg-

arternes beskaffenhed, deres sletter o. s. v., som ogsaa efter de lokale forhold, vil være bekendt for den, der har havt opmærksomheden henvendt paa denne sag.

Denne overfladens beskaffenhed og det hele fænomen er yderst eiendommeligt, og medrette bemærker derfor Ramsay, at der i intet tilfælde er fare for, at det erfarne øie skal forvekle den med den sværiske decomposition.

Det turde være hensigtsmæssigt at indskrænke denne diskussion til spørgsmaalet om klippebassinernes dannelse, men et par sider, som Dr. Nathorst har fremholdt som forklarlige ved hjælp af Pumpellys teori, bør dog her ikke forbigaaes. Det heder nemlig, at diluvialdannelsernes (diluvialsandens, grusets og lerens) store mægtighed i Tyskland derved skal forklares: »Om de alene havde faaet sit materiale fra det, som floderne og jøkeelvene kunde levere, er det vanskeligt at tænke sig, at deres mægtighed over en saa stor overflade kunde stige til hundredetal af fod. Man behøver blot at sammenligne disse dannelser med de følgende glaciale, da sikkerligen erosionen burde være størst, for at indse, at de ei alene kan have denne oprindelse«. Denne adskillelse mellem mægtige diluviale affeininger og mindre mægtige glaciale i Tyskland, er neppe holdbar. De mægtige affeininger i Nordtyskland, bestaaende afvexlende af skurstensler (geschiebelehm), diluvialsand, -grus og -ler, er netop Tysklands glaciale formation. Nu har saavel efter Nathorsts opfatning som efter den, jeg har forsøgt gjort gjældende, en stor erosion foregaaet under istiden; men han mener, at denne erosion kun bestod i en bortsopning af de løse masser; men kvantitativ maa erosionen, og som følge deraf mægtigheden af de løse masser i Tyskland, blive lige stor, enten vi tænker os, at bræerne forefandt de vordende sjøerne fyldt med løs sten eller med fast fjeld. Den glaciale erosion i stor stil forklarer mægtigheden i Nordtyskland, og at det ikke alene er floder og jøkeelve, men ogsaa fast is, som har bragt de løse masser til



Tyskland, er som bekjendt paavist af *Torell* og senere yderligere bekræftet ved paavisningen paa talrige skuringsstriber i Tyskland, ved skuringsmærker paa blokke, der stammer fra Tyskland o. s. v.

Fremdeles anfører Dr. Nathorst for sin teori, at spørgsmaalet om gamle istider i den har faaet en farlig modstander, da den paa anden maade forklarer de eneste foreteelser, som kan anføres til støtte for samme. Man kan opkaste tvivl om gamle istider, fordi de ikke er palæontologisk godtgjorte, men saalænge spørgsmaalet, om der i ældre geologiske perioder har været istider eller ei, endnu ikke er løst, er det ikke noget argument for Pumpellys teori, at den er en farlig modstander af gamle istider. Naar derhos Dr. Nathorst til forklaring af gamle konglomerater anfører, at de fremmede blokke kan have tilhørt bergkoller, som har forvitret til et par hundrede fod, og paa den af Pumpelly forklarede maade kan være kommet ind i forvittringsgruset, saa er denne forklaring aldeles utilstrækkeligt for de mægtigste og største konglomerater i Norge, der strækker sig fra Sulenøernes felt ved munden af Sognfjord og nordover til Hornelens felt ved Nordfjords munding, som naar en mægtighed paa 2000 meter, og hvor blokke fra de mindste dimensioner op til 2 meter i diameter forekommer. Disse blokke bestaar, som berørt, af de forskjelligste bergarter, grønne skifere, grønstene, kvartsit, gneiser, graniter, glimmerskifer, saussuritgabbro o. s. v., — og landet er saaledes gennemskaaret langs fjordsiderne, at snit paa indtil 1500 meters høide ligger tilskue og tilstrækkeligt viser, at Pumpellys forklaring om blokke fra forvitrede bergkoller ikke strækker til. Jeg henviser her til mit arbeide: »Studier over Konglomerater\*»).

---

\*) Archiv for Mathematik og Naturvidenskabene. Bind VI. 1881.

*Argumenter mod Dr. Törnebohm's teori.*

Om fjordene skriver Dr. Törnebohm\*): »Kan man ei tilskrive isen nogen udhulende virkning, saa maa man betragte hver fjord som en sunken dal, hvilken engang er udgravet af rindende vand, og da nu Skandinaviens fjorde have vekslede dyb fra et par hundrede til over 4000 fod, saa maa landet paa de respektive steder engang have ligget mindst ligesaa meget høiere end nu. Kan hælde til og med den dybe rende, som løber langs Norges kyst, ei er andet end den hoveddal, i hvilken hele det vestre Skandinaviens floder engang samledes«.

At hævnings og sænkninger har fundet sted, er sikkert nok, og hvis vi i vore fjorde fandt beviser for, at de i sin hele udstrækning var et resultat af rindende vands erosion, saa vilde dette være en grund til at hæve landet 4000 fod. Men nu er dybdeforholdene af den art, at en hævning til en hvilkensomhelst høide ikke vil gjøre fjordene i sin hele udstrækning til dale, af den grund, at de gjennemgaaende er dybere end havet udenfor eller havet ved munden. Følgen heraf er, at om vi hæver hele landet høiere op, saa faar vi ikke en række af dale, men en række af lauge og dybe indsjøer. Saaledes er det i Norge, i Skotland, paa Island og Grønland ved alle store og vel udprægede fjorde. Vidtløftigen at paa-vise dette ved mange tal, anser jeg for overflødig, da det før er godtgjort, og da ethvert dybdekart fra Norge, Skotland, Grønland eller Island viser det.

Ei heller kan renden langs den norske kyst have været nogen dal, thi ogsaa denne rende er et bækken, og i et tidligere arbejde\*\*) har jeg omtalt, at »om Norge, Sverige og Danmark hævedes til en hvilkensomhelst høide, saa vilde der blive en

\*) Bind IV, pag. 348.

\*\*) Jæderens løse afleininger. Meddelelser fra den naturhistoriske forening i Kristiania 1885.

lang og dyb indsjø i Skågerak, hvilken vilde naa helt øst fra Langesundsfjorden indtil vest for Jæderens nordlige del, og som vilde være mindst 280 favne dyb. Største dyb i Skagerak mellem Skagen og Hiserø er nemlig 430 favne, men dette dyb vilde ved en hvilkenksomhelst hævnning kun formindskes med 150 favne.

Med Törnebohm er jeg enig i, at de indsjøer, som maatte have været forhaanden før istiden i den lange tid, da landet laa over havet, maatte være udfyldte, og fremdeles mener jeg med Nathorst, at deslige af løse masser fyldte indsjøer maatte, om de fandtes, være rensede under istiden. Hvis vi overhovedet tænker os vore indsjøer som preglaciale, saa kommer vi nødvendigvis til de franske og italienske geologers reexcavations teorier.

Dr. Törnebohm søger at forklare sjøernes dannelse paa følgende maade\*): »Før troede man, at Skandinavien under de sekulære niveauforandringer forholdt sig som et eneste fast sammenhængende hele; nu ved man, at saa ikke er tilfældet; berggrunden er ikke et helt sammenhængende stykke, men ved sprækker sønderskaaret i utallige dele lig en uhyre mosaik. Ved de sekulære niveauforandringer og ved de forstyrrelser, som jordskjælvne foraarsagede, kunde disse dele ei fuldkommen følges ad, den ene bevægede sig noget mere, den anden mindre, ujævne sætninger opstod. Herved turde ismassernes tryk have medvirket ikke ubetydeligt. Allerede under de foregaaende perioder havde forstyrrelser i berggrunden foregaaet, og som følge heraf havde ikke alle disse særskilte stykker samme stabilitet, en del laa løsere, en del fastere, lig stenene i en løst brolagt gade. Da de senere belastedes med en efter lav beregning 2 til 3000 fod mægtig ismasse, blev de tvungne til at indtage en mere ensartet ligevægtsstilling; de dele, som laa løsere, sank ned, kiledes fa-

---

\*) Bind IV, pag. 350.

stere ind mellem de omgivende dele, og en saadan udjævning af stabilitetsforholdene lettedes ved de — det være nu langsomme eller mere hurtige — oscillerende bevægelser, hvori berggrunden sattes ved vulkanske kræfter.

»Endog om berggrundens overflade forud var fuldkommen jævn, burde ved saadanne differentialrørelser under isdækket lokale fordybninger, klippebassiner, dannes. I endnu højere grad blev dette tilfælde, naar berggrunden var gjen-nemfuret med et kompliceret system af erosionsdale; for hver gang t. ex. en lavere del af en dalgang sænkedes mindre eller hævedes mere end en ovenfor liggende, maatte et bassin dannes. Hvorledes de mange bassiner, som nu findes i vore dale, dannedes, lader sig saaledes let tænke.

Svarer nu vore sjøers form, deres dybder, deres beliggenhed, de geologiske forhold og overfladen ved kjendte sikre forrykninger til den her udviklede teori. Medrette bemærker Törnebohm, at sprækker og forrykninger ikke er hypoteser, og at de er paaviste ved geologiske undersøgelser og i gruberne i stort antal. Men undersøgelserne viser tillige, at enkelte store forrykninger paa 2000, ja paa 10,000 fod i overfladen slet ikke giver sig tilkjende, og i grubefelter, hvor forrykningerne er baade mange og store, er overfladen jævn. Jeg vil ikke her opholde mig nærmere ved denne side af sagen, da det andetsteds er nærmere omtalt\*). Rigtigheden af, hvad Törnebohm anfører om sprækker ved svenske sjøer, betvivler jeg ikke, og at sprækker, lagenes retning, bænking o. s. v., har spillet en rolle under erosionsarbeidet, fordi de er svaghedslinier eller linier for mindste modstand og grændser mellem bergarter af forskjellig modstandsevne, er vistnok saa, men hvis deslige sprækker, forrykninger o. s. v., skulde have været en væsentlig betingelse for sjøernes dannelse, derved at et ved sprækker sønderskaaret stykke tryk-

\*) Forsøg paa en geologisk diskussion. Archiv for Math. og Naturv. Bind VI, 1881.

kedes ned, da maatte disse sprækker, staaende i relation til indsjørerne, være et saare almindeligt fænomen, og de maatte kunne paavises ved klippebassiner med nøgne omgivelser paa sjøens sider.

Fra mine reiser kjender jeg kun et eksempel paa, at en forsækning er dannet nogenlunde i lighed med den af Törnebohm fremsatte teori, uden at dog isen har spillet nogen rolle til at trykke forsækningen ned. Dette i sit slags enstaaende eksempel er den bekjendte landstrækning mellem *Almannagjá* og *Hrafnagjá* ved *Þingvellir* paa Island. Af beskrivelse kjender jeg derhos et andet tilfælde, hvor en forrykning synes at spille den væsentligste rolle ved dannelsen af en sjø og en dal, nemlig *Jordandalen* og det *Døde Hav* i *Palæstina*. Mellem *Almannagjá* og *Hrafnagjá* er utvivlsomt en landsstrækning paa omtrent 7 kilometers bredde og paa omtrent 8 kilometers længde ligetil sunken ned paa en maade, som lettest kan forklares ved at sammenligne det hele med en nedtrykt tangent paa et pianoforte. Landskabet bestaar af dækker af lava; den sunkne del i landskabet forestiller den nedtrykte tangent, det smale aabne rum til begge sider mod nabotangenderne forestiller forrykningerne eller sprækkerne, *Almannagjá* og *Hrafnagjá*. Den hele indstyrtning her er postglacial, thi lavastrømmens overflade er ikke isskuret, og det laa rær at sætte det i fortsættelse af det sunkne landskab optrædende *Þingvallavatn* i forbindelse med sækningen. Men *Thoroddsen* har paavist, at selve *Þingvallavatn* er en glacial sjø med moræner foran, saa at det synes kun at være egnen omkring *Þingvellir*, som er sunken. At deslige sækninger kan finde sted paa Island, hvor store aabne rum maa findes i dybet efter de mange udtømte lavamasser, er forstaaligt. At fjeldgrunden hos os skulde være i den grad fuld af enorme rum, at hele sjøer kunde trykkes ned midt i fjeldet, naar dette er gjennemsat af sprækker, kan vel ikke benægtes, men synes lidet sandsynligt; og den af *Törnebohm* udviklede teori

synes nødvendigvis ei alene at maatte forudsætte sprækker forat faa mosaiken istand, men ogsaa tomme rum forat give plads for de nedtrykkede løsnede stykker.

Exemplet fra Þingvellir er af overmaade stor betydning, da man der har anledning til at se, hvorledes en forsænkning, fremkommet ved dislokation og indstyrtning, i virkeligheden ser ud. Dens yderst eiendommelige form, et fladt sunket landskab begrændset af de to gjæer, som ovenfor beskrevet, er høist forskjellig fra vore dales og sjøers form, og disse forholdet her ved Almannagjá er jo af alle erkjendt som i sit slags enestaaende.

*Jordandalen* og det *Døde Hav* giver efter Lartet et mærkværdigt eksempel paa en betydelig forrykning, der, i modsætning til de forrykninger, vi kjender fra de ældre formationer, paa en iøinefaldende maade giver sig tilkjende i overfladen.

Det Døde Havs omgivelser bestaar ligesom den største del af det faste fjeld i Palæstina overhovedet af lag tilhørende Kridt og Eocæn, og de bergarter, der tilhører disse to formationer, ligger konformt over hverandre og har samme petrografiske karakter.

Ved det Døde Hav kommer en sandsten (grès de Nubie) ud i dagen, men kun paa sjøens østside ved foden af de bjerge, der begrændser sjøen mod øst. Denne sandsten bedækkes af kalklag tilhørende Kridt, der atter bedækkes af lag tilhørende øvre Kridt og Eocæn.

Fra Middelhavet af hæver lagene fra Kridt og Eocæn sig, indtil de danner Judabjergenes ryg, som fortsætter ligetil Libanon over Galilæas bjerge. Men fra ryggen, der ved Jerusalem ligger 779 meter over havet, falder de i modsat østlig retning ned mod det Døde Hav, der ligger 392 meter under havets overflade, og da selve sjøen er 1308 fod (397 m) dyb, saa ligger det dybeste punkt af dens bund 789 meter under havets overflade.

De lag, der tilhører øvre Kridt og Eocæn, og som fra

Judabjergene sænker sig ned til det Døde Havs vestside, afløses paa sjøens østside af den ældre sandsten, hvilket viser, at der langs sjøen maa være en forrykning tilstede, hvilken forrykning af Hull er paavist helt ned imod Akabah i Jordandalens forlængelse mod det Røde Hav.

Lagenes beliggenhed, forrykningen og konfigurationen af det Døde Hav bund synes at vise, at Jordandalen og det Døde Hav er fremkomne ved en forsækning af lagene vest for brudet i Jordandalen. Regnvandet har da, efter Lartet, senere bragt de sedimenter, som det tog fra de omliggende fjelde, ned i dalen og har givet den dens nuværende fysiognomi. Nøiagtige profiler i sand maalestok tværs over Jordandalen vilde vise, hvormeget der er bortført ved erosion.

Jeg har noget udførligere dvælet ved disse to tilfælde, forsækningen ved Þingvellir paa Island og ved det Døde Hav i Palæstina, fordi det er de eneste to mig bekendte tilfælde, da forrykninger i det faste fjeld direkte giver sig tilkjende i form af depressioner i overfladen. Begivenheder, som de her omhandlede, maa efter Törnebohms teori have fundet sted ved dannelsen af vore indsjøer, kun med den forskjel, at isen her har spillet en væsentlig rolle ved at trykke ned det i sprækker sønderskaarne land. Men hvis saa er tilfælde, da maa vi vente, at de fremkomne depressioner skulde have en begrænsning og en konfiguration nogenlunde i lighed med forsækningerne ved Þingvellir eller det Døde Hav, saa meget mere, som isen jo efter teorien ikke skulde have nogen eroderende indflydelse paa det faste fjeld til at forandre konfigurationen, og forvitningen siden istiden vilde jo ikke være tilstrækkelig til at udslette en saa eendommelig konfiguration i vore faste bergarter. At vore dale og indsjøer har en helt anden beliggenhed i forhold til landenes høiderygge end Jordandalen og det Døde Hav, skal jeg senere forsøge at paavise.

*Argumenter mod Dr. Nathorsts og Dr. Törnebohms teorier.*

Jeg kommer nu til nogle bemærkninger, der gjælder baade Dr. Törnebohm og Dr. Nathorsts teori. Saavidt jeg kan forstaa, hersker der enighed om, at der før istiden fandtes dale dannede ved erosion, at disse før istiden havde naadet et vist dyb, hvor stort ved vi ikke. Det er derfor især med hensyn til de bækkenformede fordybning, at der gjør sig forskellige meninger gjældende. Men nu er der et stort forhold, som de svenske geologer synes delvis at glemme, naar de opstiller sine teorier, og det er indsjørnes plads i dalene. Lad os med Dr. Törnebohm tænke os indsjørne dannede ved en lokal sænkning, efterat landskabet er opskaaret i mosaik. Vi ved, at de sprækker og forskyvninger, som har sønderskaaret fjeldgrunden, i det hele gaar i forskellige retninger, har forskjelligt strøg, og deres beliggenhed falder ikke sammen med de veie, som det rindende vand tager, eller som isbræerne tog. Disse eroderende kræfter følger som regel i det hele linien for det stærkeste fald. Vi skulde altsaa vente at finde erosionsdalene gaaende i en retning, og de ved sprækker sønderskaarne, senere til bassiner nedtrykkede dele af fjeldgrændsen gaaende oftest i en anden retning. Dette er ogsaa virkelig tilfælde med Jordandalen og dens forlængelser, hvilke gaar parallelt med Judabjergenes høideryg, medens erosionsdalene fra Judabjergene, saaledes som karterne viser, gaar lodret paa denne retning.

Et i mosaik opskaaret landskab vilde give sjøer og dale, der kunde skjære erosionsdalene i forskellige retninger, og hvis sjørne var fremkomne efter forrykninger, saa sent som under istiden, og isen ikke eroderede, saa vilde der indtræffe eiendommelige hydrografiske forhold, saaledes som vi ser nær Þingvellir, hvor elven Oxará pludselig styrter ned i sprækken ved Almannagjá, der skjærer elvens løb.

Hvis sjørne var dannet ved sekulær forvitring, idet



enkelte dele af berggrunden enten paa grund af den petrografiske beskaffenhed, eller fordi den var gjennemsat af mange sletter, forvitrede stærkere end andre, saa vilde de derved fremkomne fordybninger kun undtagelsesvis have samme længderetning som erosionsdalene. Men en hvilken som helst teori, der skal forklare sjøer, bør kunne gjøre rede for den simple kjendsgjerning, at de største sjøer, som Mjøsen, Randsfjord o. s. v. ligesom fjordene, ligger orienteret i forhold til landets høieste dele, saaledes at de kræfter, der har dannet dem, øiensynligt har i det store fulgt de fra fjeldet udgaaende dale. Efter den glaciæle teori er det forstaaligt, at indsjøerne ligger i de store dale og i deres retning, fordi isstrømmene fulgte dalene.

Saa er der en hel del forhold ved sjøerne og fjordene, som, saavidt jeg kan se, staar istrid med begge teorier. At saavel Dr. Nathorst som Dr. Törnøbohm ikke sikkert hævder en almindelig anvendelse af sin teori, er allerede udtrykkelig anført, men da diskussionen jo gjælder klippebassiner i sin almindelighed, og da vore klippebassiners forekomst bestemt synes at antyde, at de er resultater af kræfter af samme art, saa er det berettiget at prøve teoriens almindelige anvendelighed. Skjønt dette allerede er sagt tidligere, gjentager jeg det dog her for at forebygge misforståelse.

Lad os se paa vor største indsjø, Mjøsen, og paa vor største fjord, Sognefjorden, og opkaste det spørgsmaal, om de fremsatte teorier formaar at gjøre rede for deres dannelse. Saavel Mjøsen som Sognefjorden er orografisk særdeles udprægede dannelser, de optræder, om dette udtryk kan anvendes, som saa helstøbte orografiske individualiteter, saa at det vistnok uden nærmere paavisning tør antages for givet, at de forskjellige dele af bassinerne ikke er dannet ved forskellige kræfter. Derimod er det paa den anden side ligesaa paafaldende, at disse bassiner med sine dale er uafhængig af den geologiske bygning. I de indre dele af Sogne-

fjorden (omkring Lyster) gaar fjorden gjennem lerskifer og kvartsskifer, eller gjennem granit og labradorsten (Lærdal, Aurland, Nærøfjorden), længer ud gjennem de forskjelligste gneisbergarter og endelig længst ud gjennem konglomerat. Mjøsen gjennemskjærer i sin øverste del forskjellige lagdelte bergarter tilhørende »sparagmitformation«, gaar saa gjennem siluriske lag, derpaa gjennem granit og grundfjeldets bergarter. Hvis nu disse depressioner var et resultat af den sekulære forvitring, hvilken jo igjen er afhængig af bergarternes beskaffenhed, saa burde man i saa vidt forskjelligte bergarter som de ovennævnte forudsætte depressioner og bassiner, der var afhængige af bergarternes beskaffenhed, saaledes at depressionerne begyndte og ophørte med bergarterne, men Sognefjorden gaar tvert igjennem formationer af den forskjelligste modstandsevne med tiltagende dybde indtil maximum og derpaa med aftagende dyb. Dybden, der naar op til 1244 meter, er tidligere omtalt i arbeidet »Om Dannelsen af Fjordene, Fjordalene, Indsøerne og Havbankerne \*)«.

Dybdeforholdene i Sognefjorden og i andre fjorde og i indsøerne gjør det yderst usandsynligt, at en kemisk virkende kraft, for en væsentlig del afhængig af bergartens beskaffenhed, skulde have udhulet basinerne. Alene fjordenes store dyb vil vistnok berettigede til at forkaste tanken om en sekulær forvitring, og den omstændighed, at bassinerne sætter igjennem de forskjellige formationer viser, at disse bassiner ligesaa lidt som den dem omgivende kuperede overflade kan hidrøre fra en kemisk virkende kraft, afhængig af bergartens beskaffenhed.

Men fjordenes form og dybdeforholdene gjør det ligesaa usandsynlig, at fjordene skulde være dannet efter Törnebohms teori, thi der vilde her forudsættes dislokationer, gaaende paa en strækning af et par hundrede kilometer gjennem bergarter af meget forskjellig beskaffenhed, hvilke dislokationer

\*) Vet. Acad. Förh. 1875 No. 4 pag. 33.

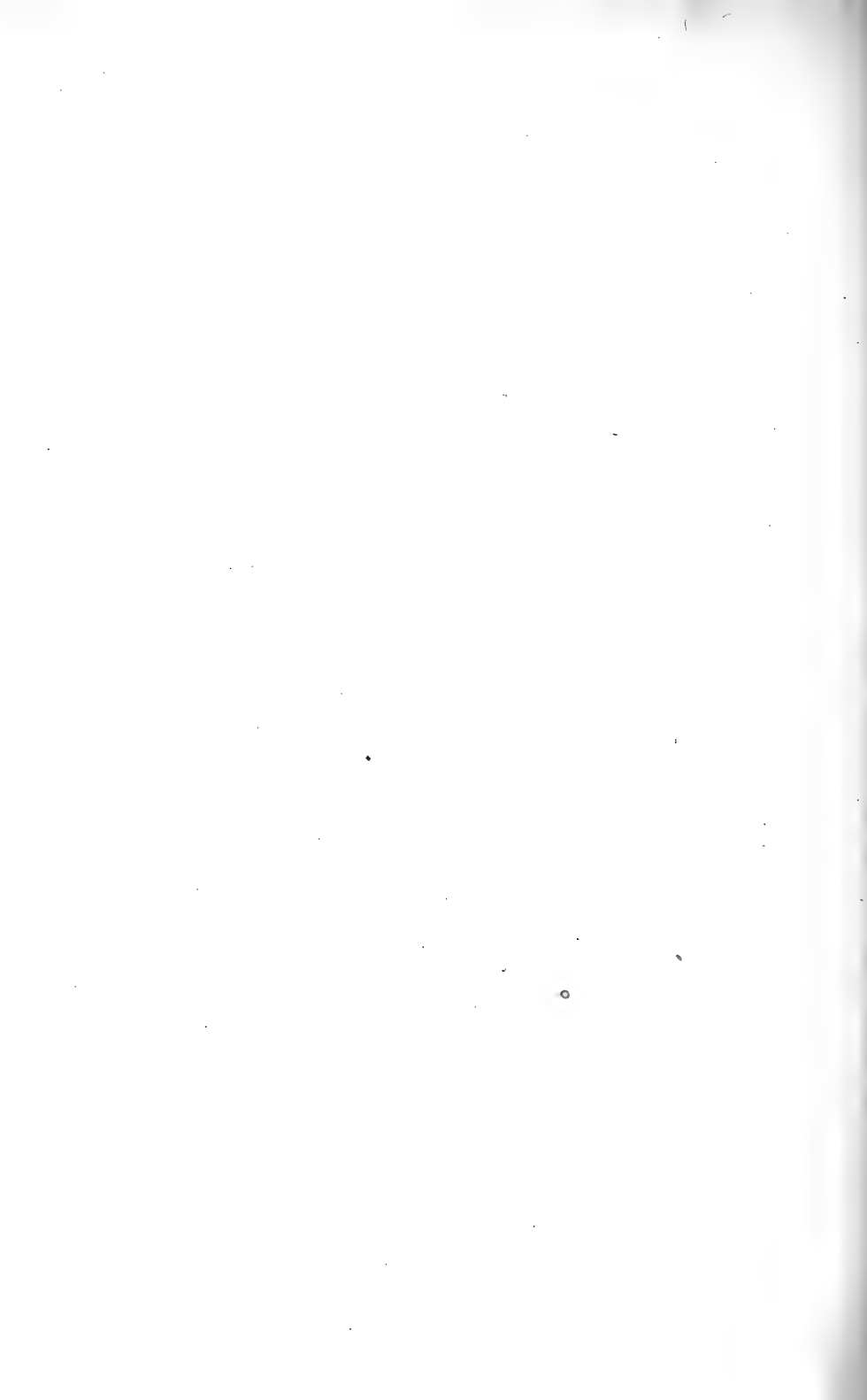
forgrenede sig i bifjordene. Men deslige sletter, der forgrener sig som et træ lig de store fjorde, og saa ender op imod høifjeldet, har det neppe været Törnebohms mening at antage.

Overhovedet forekommer det mig, at de svenske geologer har taget forlidet hensyn til landets konfiguration i det hele, og til den forbindelse, der øiensynligen findes mellem landets høideforhold og dalenes, sjørernes og fjordenes beliggenhed og deres dybdeforhold. Sveriges reliefforhold er ikke paa en saa iøinefaldende maade udmeislet som Norges, men trods den store forskjel lader det sig neppe betvivle, at til exempel de svenske sjøer i det nordlige Sverige er æquivalenter for de norske fjorde i det nordlige Norge. Grundtanken i begge landes orografi er den samme, idet dale med talrige klippebassiner udgaar til begge sider fra de høieste dele af landene, men medens disse dale og bassinerne nær vestkysten, hvor nedbøren er og sikkerligen var størst, og hvor heldningsvinkelen var stor, naar betydelige dyb, saa svinder den udprægede dalform i Sverige og tildels i det sydøstlige Norge.

Her forðres, for at forklare det hele store fjord- og sjøfænomen en kraft, der lig elvene udgik fra landenes øverste dele, eroderende som vandet, men tillige med evne til at udhule bassiner. Thi dalene kommer fra fjeldet, og fjordene og sjørerne danner dalenes fortsættelse; trods vore landes særdeles varierede konfiguration er dette den store ledende grundplan ei alene i Norges overflade, men i Skotlands, Islands, Schweiz og nabolandenes og sikkerligen i det endnu isdækkede Grønlands.

Med fuld erkjendelse af betydningen af den detaillerede undersøgelse og af den enkelte forryknings vigtighed tør det sikkert siges, at kun en almindelig teori, der gjør rede for de store og simple forhold i vore sjøopfyldte og fjordbegrandsede lande, vil endelig trænge igjennem, naar en forstandig diskussion om disse bækkener afsluttes.

---



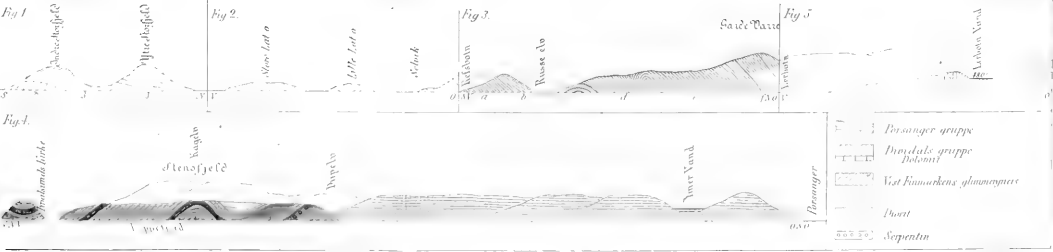


# GEOLOGISK KART ÖVER PORSÄNDER HALVÖ

vad  
**KARL PETERSEN.**  
1884.

- Löss-beredningar. (Sand, skalflorent)
- Porsänder gruppen
- Dorsals gruppen  
 Indlægninger af Dolomit
- Dorsit  
 Serpentin
- Glimmerskiferne } bygges af  
 } af ældre
- Vestfavisarkens glimmergneis
- Granatgneis (Granulit)

Hydrekvæernes optæknelse for høier 500' (157 m.)



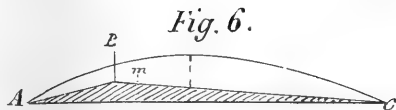
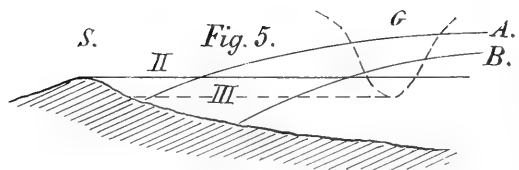
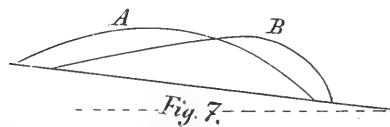
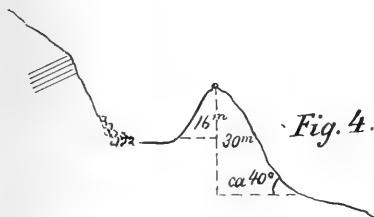
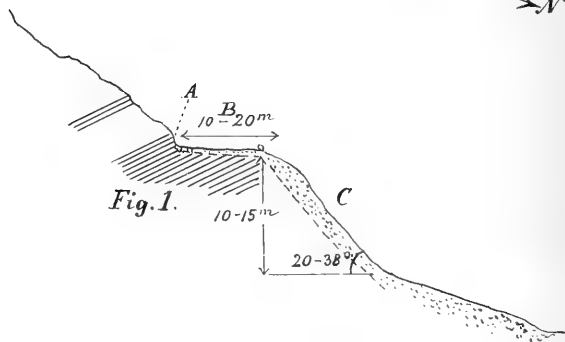
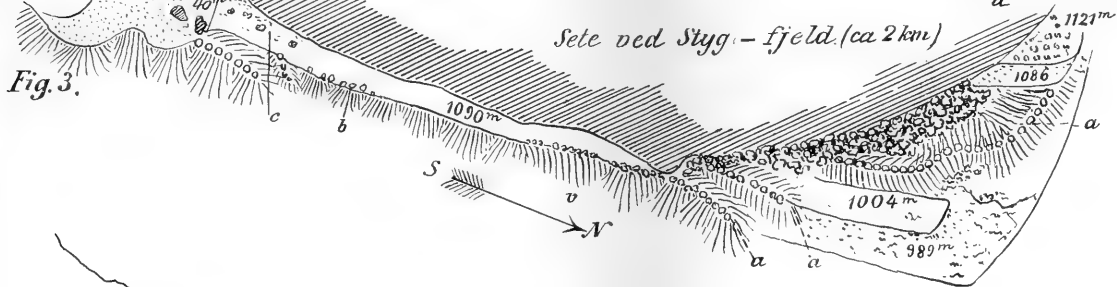
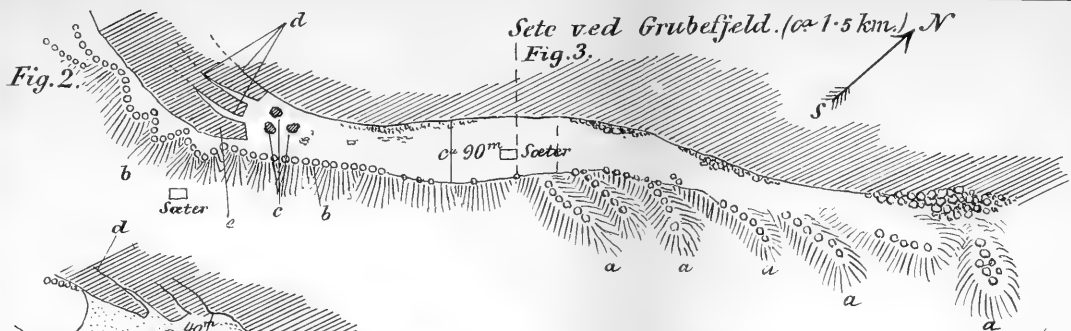
- Porsänder gruppen
- Dorsals gruppen  
 Dolomit
- Vestfavisarkens glimmergneis
- Dorsit  
 Serpentin











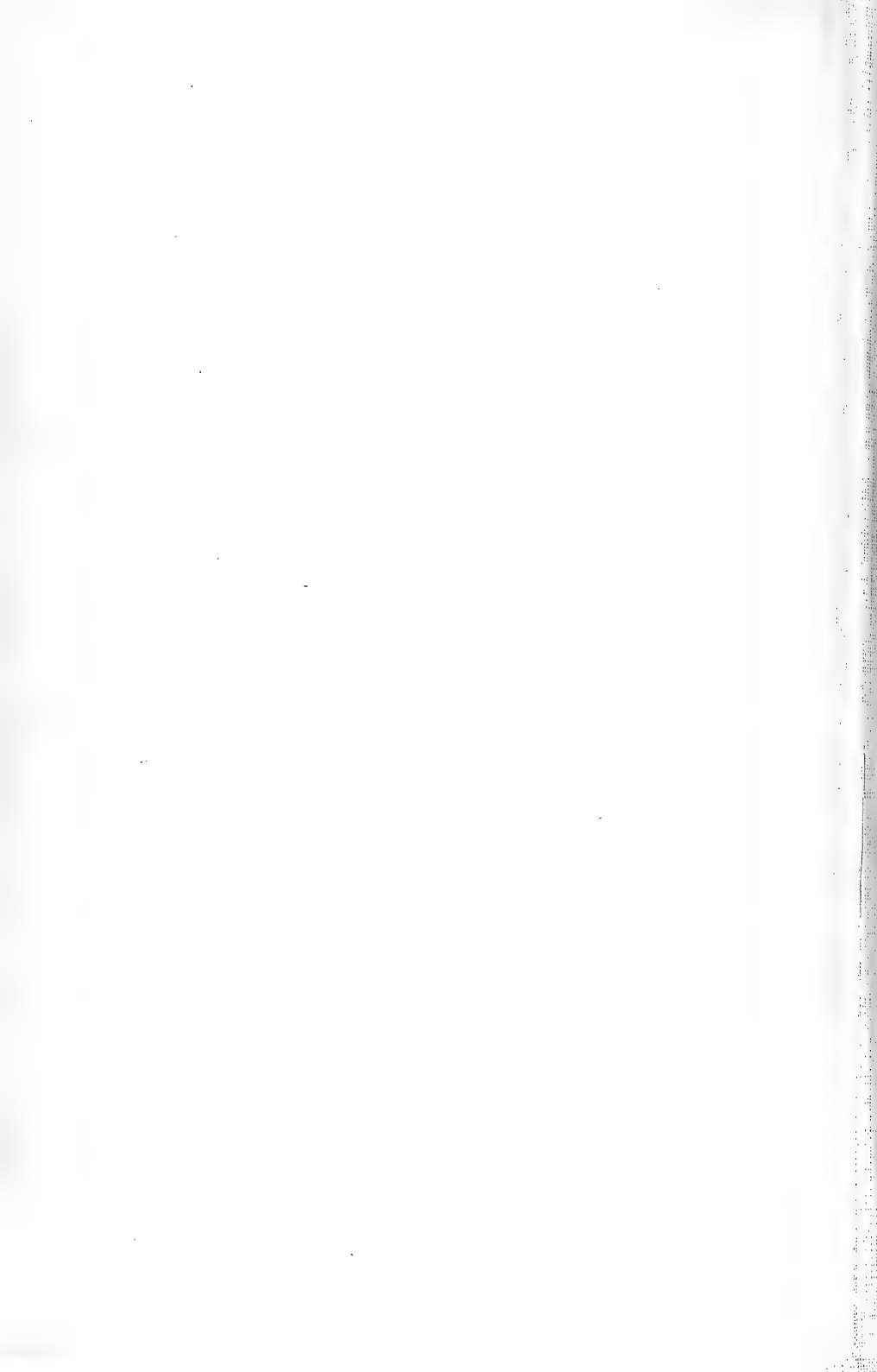


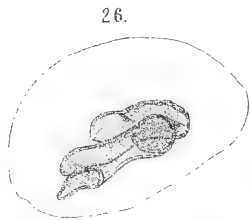
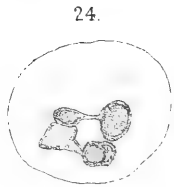
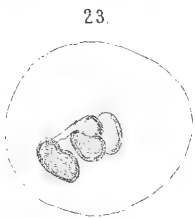
Kart N<sup>o</sup> 2

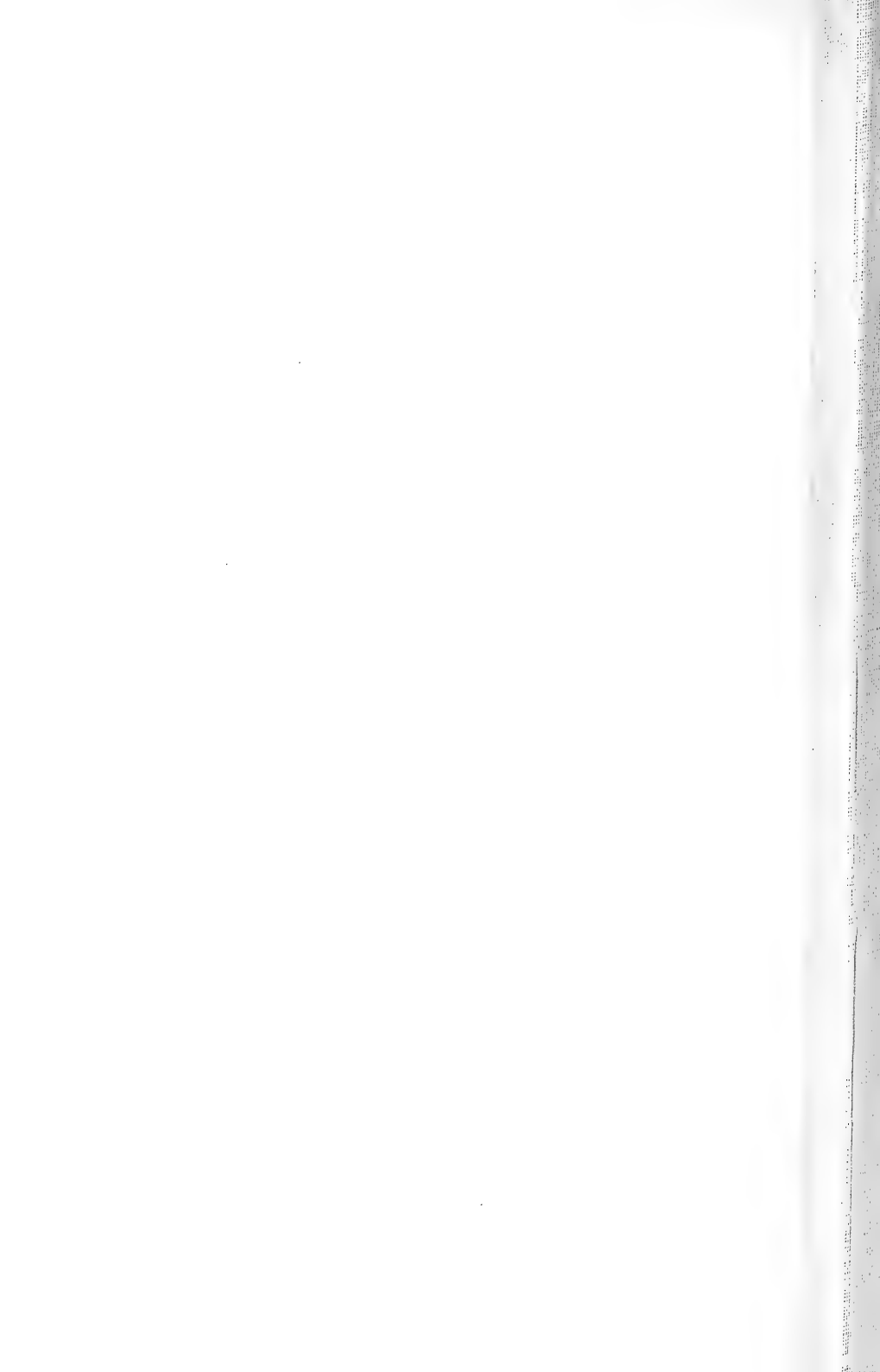
Skitseret kart over  
indlandsisens sidste stadier  
og  
seternes udbredelsesfelt



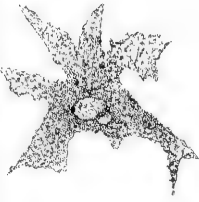
- Skitsermerker og rødding
- ← Flytblokkens an
- - - - - Seter
- I " Islakket, grænser
- Brønsketlet
- Vandskillet







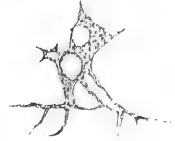
28.



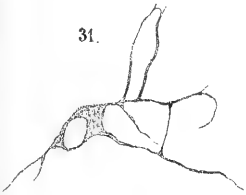
29.



30.



31.



32.



33.



34.



35.



36.



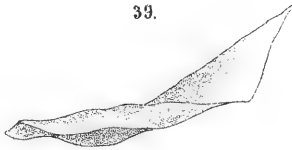
37.



38.



39.



40.



41.



42.



43.



44.







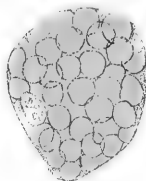
45.



46.



47.



48.



49.



50.



51.



52.



53.



54.



55.



56.



57.



58.



59.



60.



61.



62.



63.



64.



65.

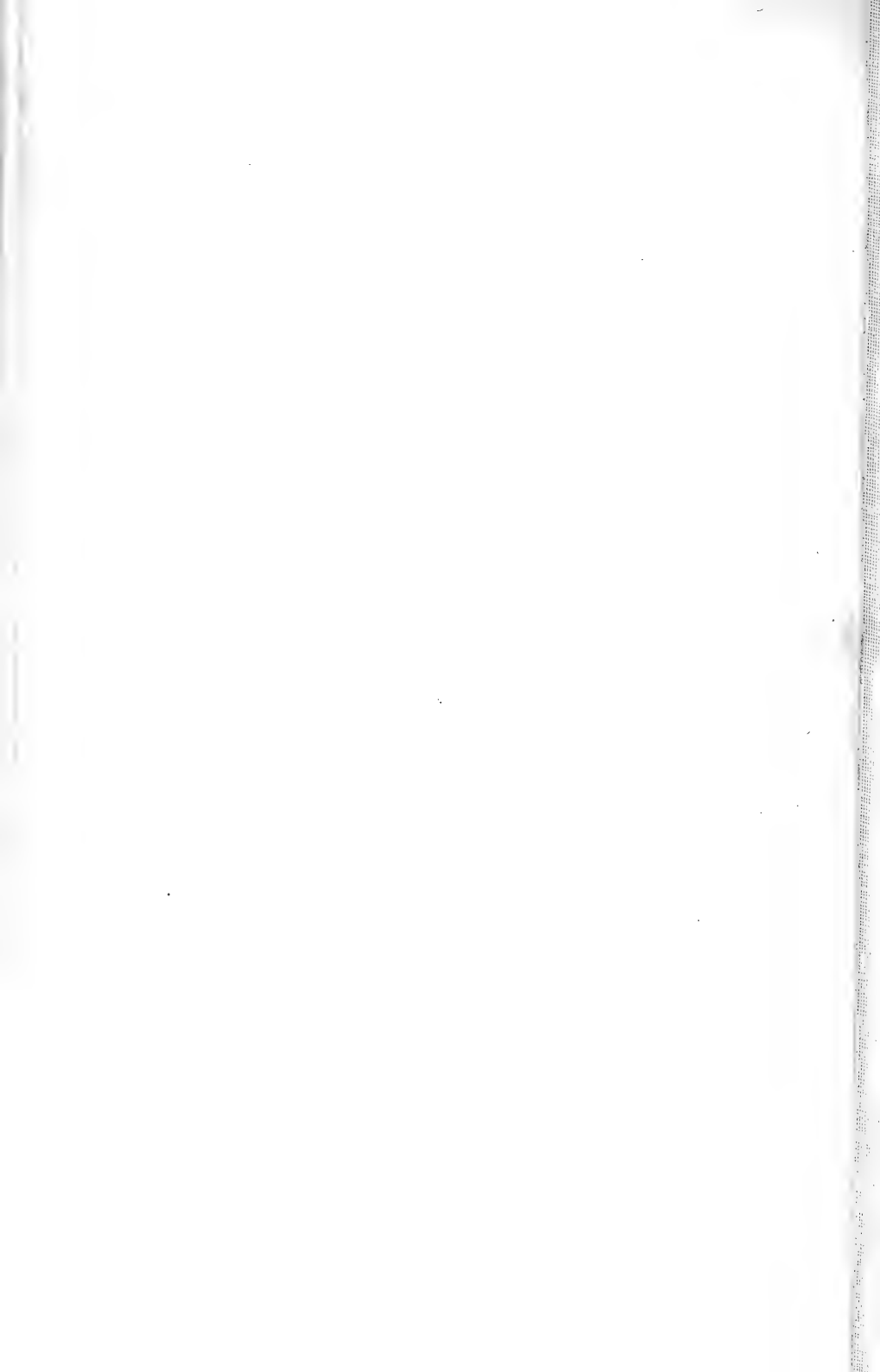


66.



67.





68.



69.



70.



71.



72.



73.



74.



75.



76.



77.



78.



79.



80.



81.



82.



83.



84.



85.



86.



87.



88.

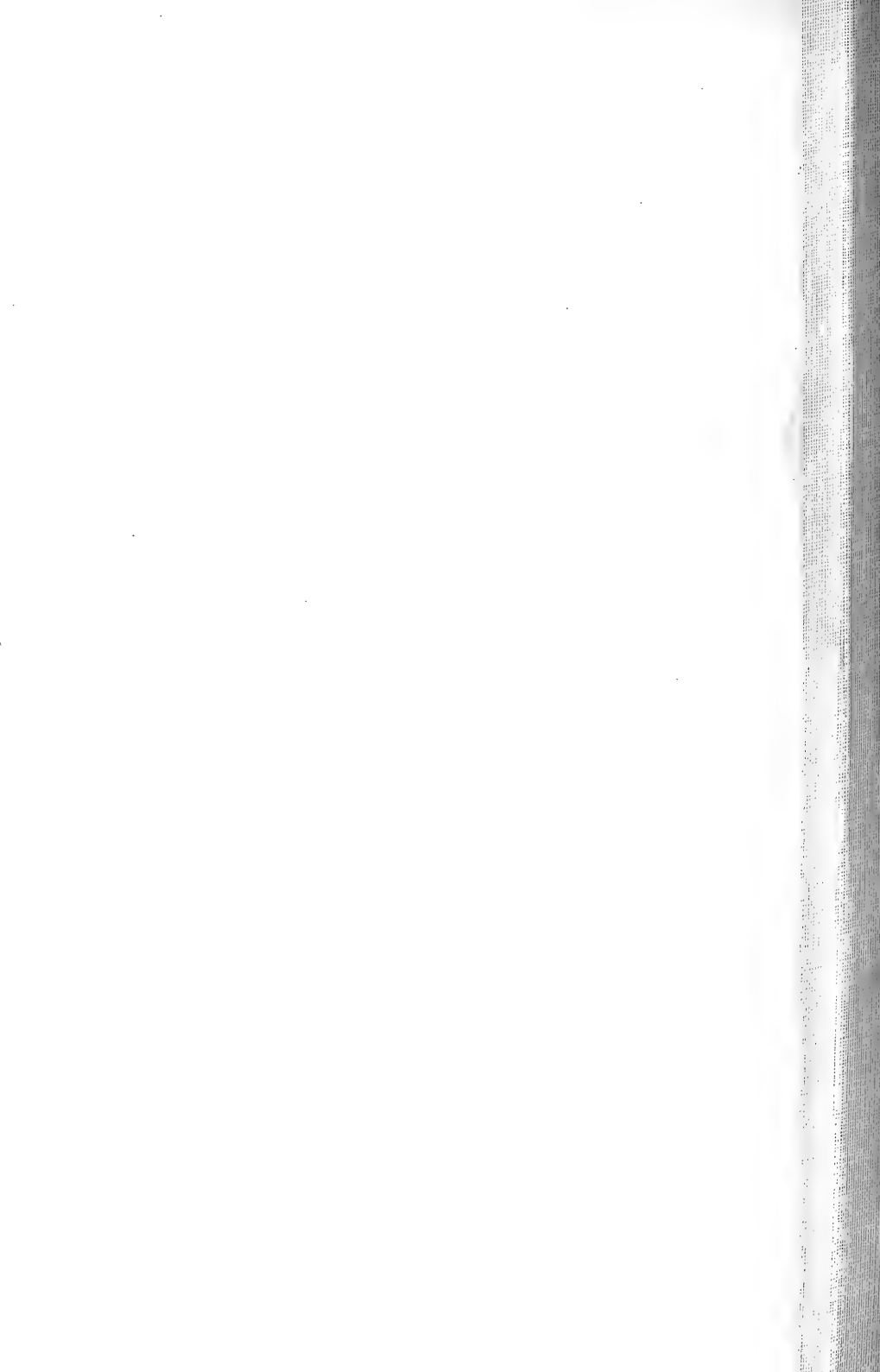


89.



90.





91.



92.



93.



94.



95.



96.



97.



98.



99.



100.



101.



102.



103.



104.



105.



106.



107.



108.



109.



110.



111.



112.



113.



114.



115.



116.



117.



118.



119.



120.



121.



122.



123.



124.

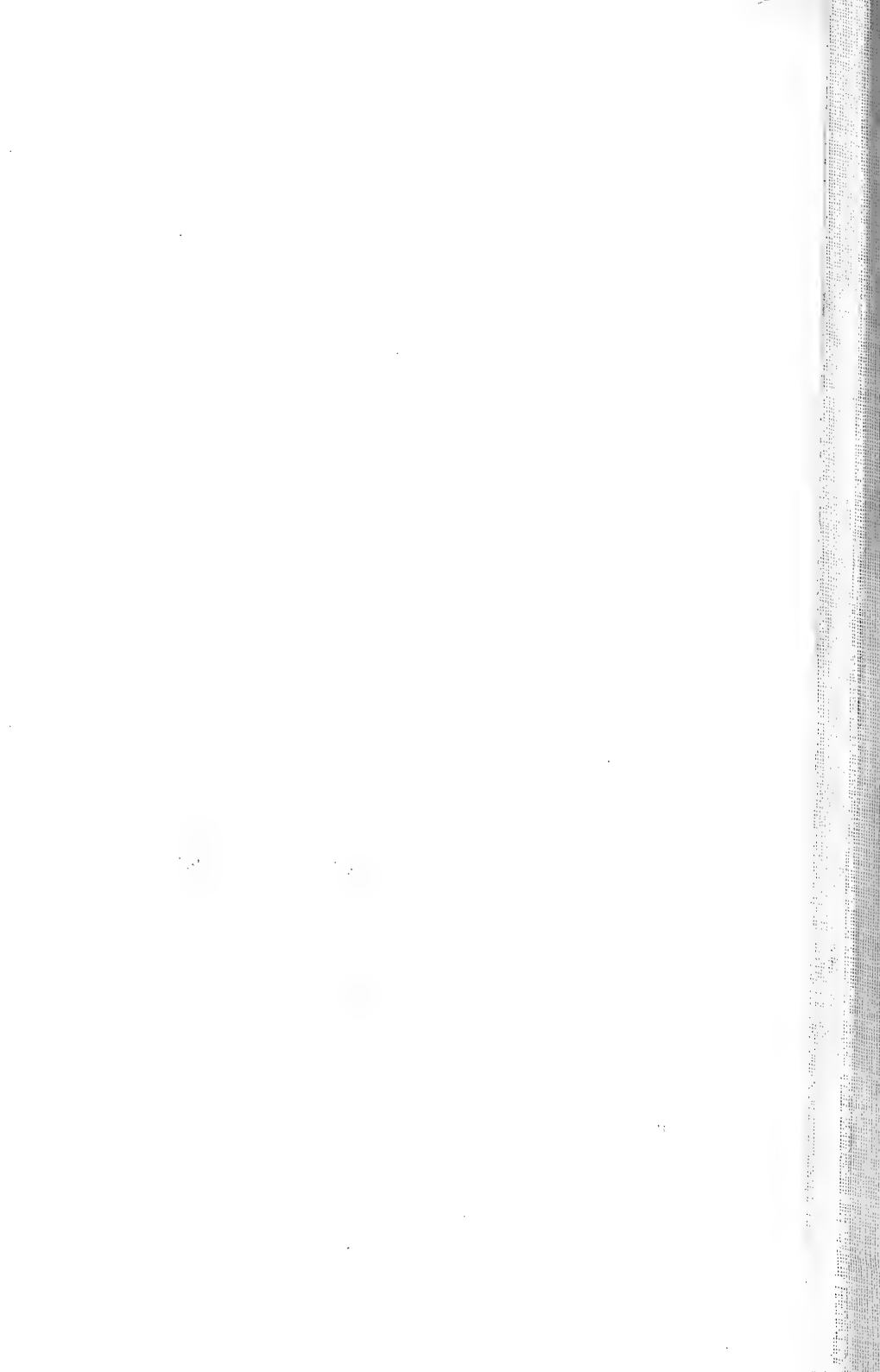


125.

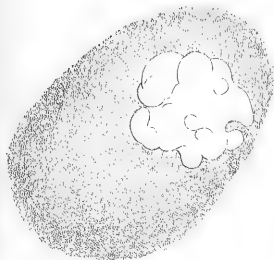


126.

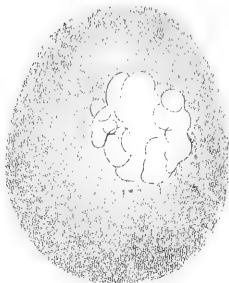




127.



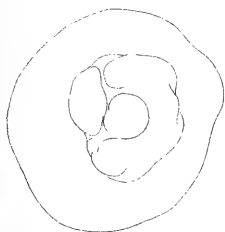
128.



129.



130.



131.



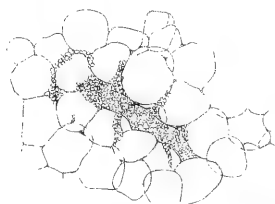
132.



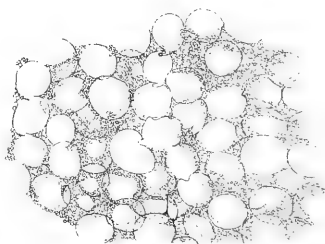
133.



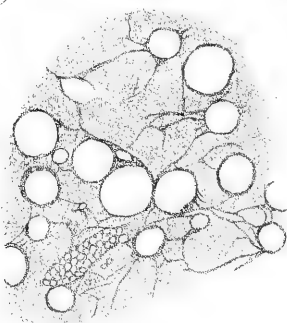
134.

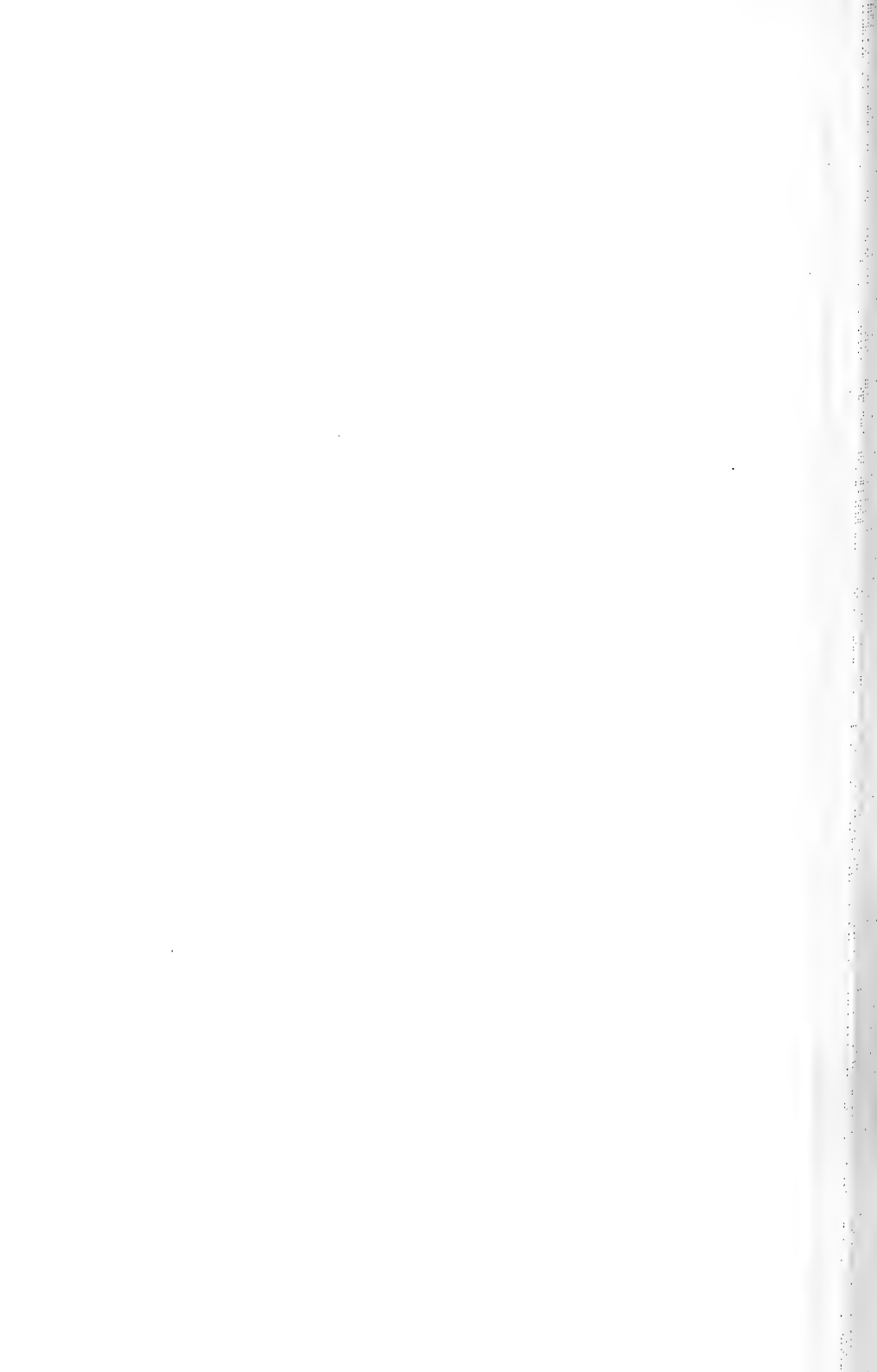


135.

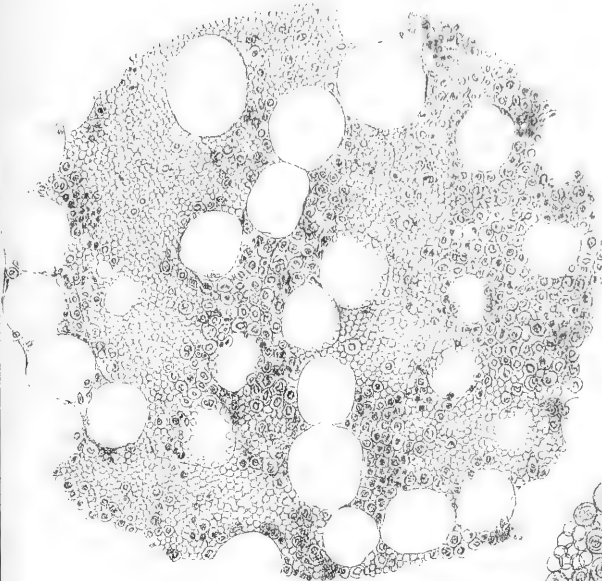


136.

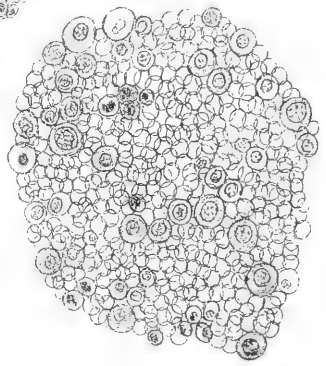




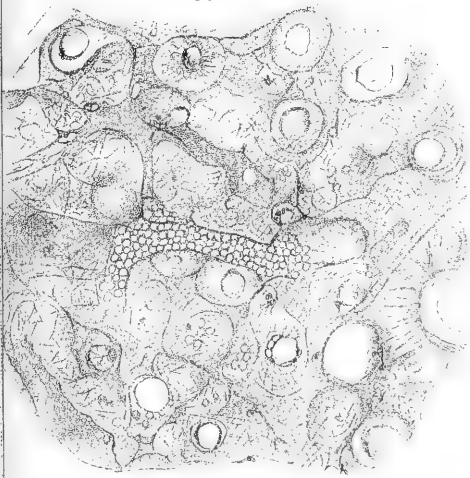




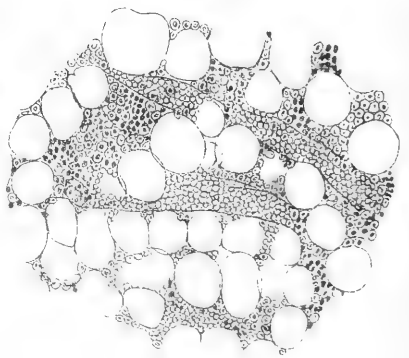
139.

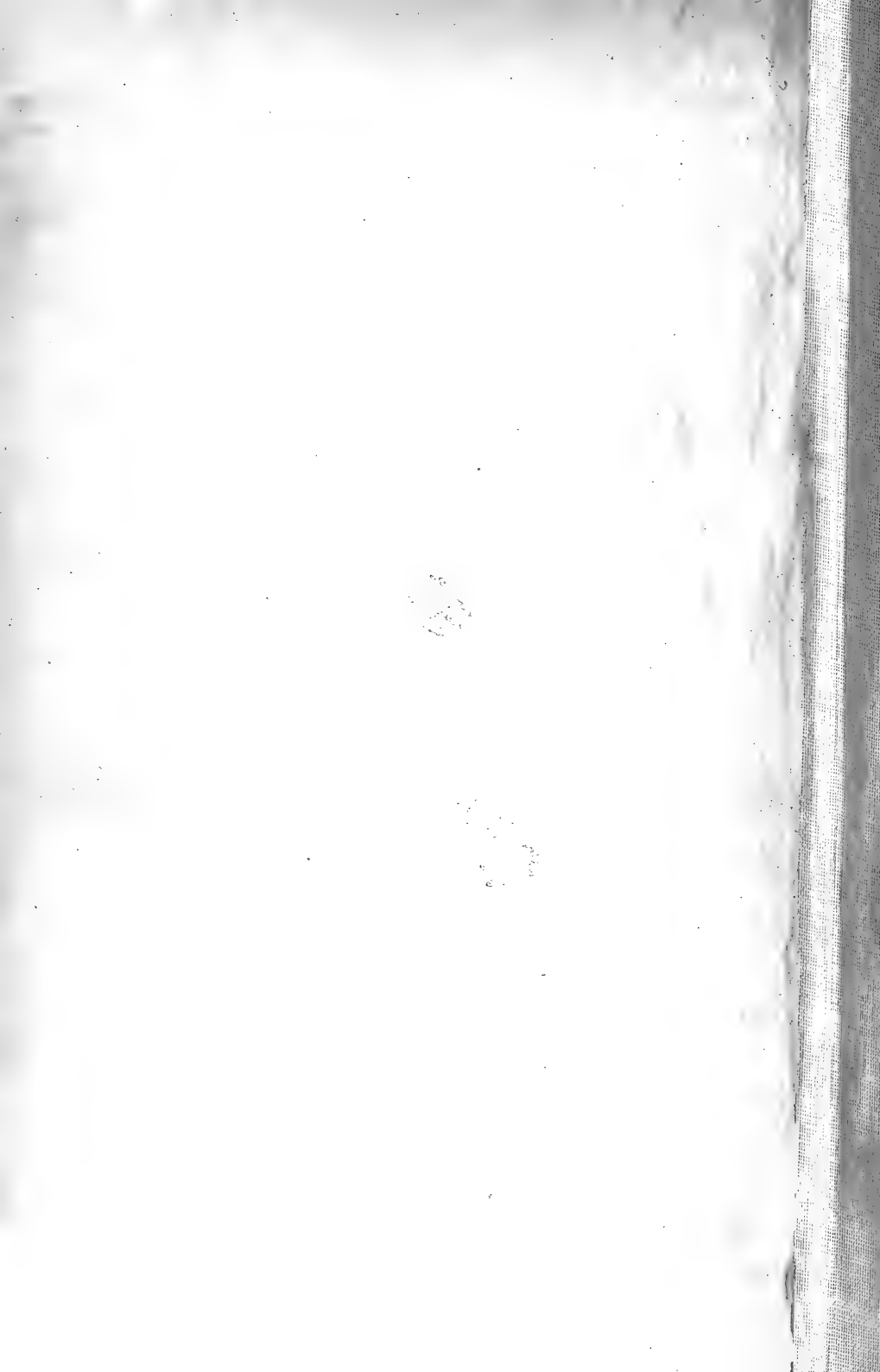


140.



137.





1886  
K. O. Sars

# Archiv

for

# Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm Müller og G. O. Sars

---

Tiende Bind. Første Hefte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

Septbr. 1884.

## Avertissement.

*La nature*. Revue des sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie. Journal hebdomadaire illustré. Rédacteur en chef, *Gaston Tissandier*. 7<sup>e</sup> p. Aarg. 20 00. Ind. Nouvelle machine dynamoélectrique à courants alternatifs. Recherche de comètes. Le lait et le beurre en France. Les serres du jardin botanique de Glasgow. Sur un moyen pratique d'avoir de l'eau chaude le matin. Accidents de chemins de fer, le déraillement de Hugstetten. Voyages d'exploration de m. de Brazza dans l'Afrique équatoriale. L'automate joueur d'échecs. Lakanal à propos de sa statue. Une vigne extraordinaire à La Roche-sur-Yon. Le sac-pupitre du sous-officier. Une lettre de m. F. de Lesseps. Les conférences de internationales des électriciens. Contrôleur d'aiguilles de m. Lartigue. La période humaine en géologie. Association scientifique internationale. Comteur d'eau, système Jaquet. Situation actuelle des réseaux téléphoniques dans le monde entier. Transport des navires par chemin de fer à travers l'isthme de Tehuantepec. Application domestique de l'électricité. Carte du relief de la France, dressée par E. Guillemin. Le fer préservé de la rouille. Petite turbine pour haute chute de Bell. Analyse du lait. La conservation des fruits. Les téléphones à pile. La mission française du cap Horn. Le pavage en bois. Les moulins de marée. Le chauffage par l'acétate de soude cristallisé. La récolte du vin en France. Un poste de pompe à vapeur à Paris. Application de l'acide carbonique aux pompes à incendie. Le cheval force motrice. Mesureur de liquides, système Monroy. Un bicycle marin. Culture des Bruyères: Frica Cavendishiana. Frein à air comprimé, système Wenger. L'éclairage électrique des ateliers et chantiers de Saint-Denis. La trière athénienne contre-amiral Seris. Le mouvement perpétuel. Le joueur d'échecs de Robert-Houdin. Un chasse-neige pneumatique. Les origines historiques de l'industrie. Le rebâtement des montagnes. Un problème téléphonique: La téléphone à grande distance. Balance-compteur, système Vincent. Éclairage électrique du navire cuirassé le Redoutable. Un nouveau système pour l'extraction du soufre. Physique sans appareils. Une plante roulante dans la vallée du Kansas. La distribution de l'électricité en Angleterre. Le moulin de marées. L'agriculture en Californie. Nouveau mode de production de l'aluminium. Pré-servation du fer contre la rouille. Les spectres vivants. Cométe du 2. février 1883, observé à Paris. Transport de force à distance par deux machines dynamoélectrique, expériences de M. Deprez. Mesureur de liquides, système Heron. Plantes introduites à Queensland. Le viaduc de

7026  
Apr. 14, 1885

*L. Müller*

# Archiv

for

# Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm-Müller og G. O. Sars.

---

Tiende Bind. Andet Hefte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

Marts 1885.

## Avertissements.

**La nature.** *Revue des sciences et de leurs applications aux arts et l'industrie.* Journal hebdomadaire illustré. Rédacteur en chef: *Gaston Tissandier.* Pris pr. Aarg. Kr. 26,00. *Inth.* Application de la traction électrique au chemin de fer monorail. Restes de végétaux de l'ancienne Egypte. La marine moderne. Un atelier de silex taillés, en Russie. Sables mouvants et colonnes de brèche du Turkestan. Appareils d. m. Cailletet pour la liquéfaction des gaz. Le tremblement de terre en Angleterre 22—4—84. Sur l'aspect de la planète Saturne. Découverte de tourbeaux gallo-romains ou mérovingiens à Trun (Orne). Machine à cercler les tonneaux. Scie continue à fils métalliques. Nouv. île volcanique dans l'Alaska. Méthode pratique pour apprécier les distances. La photographie colorée. Le canal de Panama. Attitudes après la mort. Station centrale d'éclairage électrique, système Edison, à New-York. Les nouvelles canonières à roue de la marine française. Explosion extraordinaire d'une chaudière à vapeur, à Orléans. Les anhingas ou oiseaux-serpents. Le tunnel de la Manche. Descenseur de sauvetage pour incendie. Le jeu des lutteurs. La force des matières explosives. Le nouveau phare d'Eddystone. Machines infernales et torpilles sèches. Le ballon captif de Turin. Explorateur sous-marin d. m. Toselli. Procédé collodiographique du dr. Henoque. Un drame dans la fosse aux ours au jardin des plantes de Paris. Attitudes après la mort par la foudre. L'émigration au Tonkin. Le crapaud cornu. — Bibliographie. Revue de l'étranger. Cronique. Nécrologie. Academie des sciences. Sociétés savantes. La science pratique. Boite aux lettres. Recettes et procédés utiles. Bulletin météorologique de la semaine.

**Die Natur.** *Zeitung zur Verbreitung, naturwissenschaftl. Kenntniss u. Naturanschauung für Leser aller Stände.* Organ d. »Deutschen Humboldt-Vereins«. Hrsg. v. Dr. *Karl Müller*, Halle. Pris pr. Aargang (ugentl. Nr.) Kr. 17,60. *Inth.* Sonnen-Rotation und Planeten-Rotation. Die Erkennung von Schrift-Fälschungen. Mystik der Thierwelt. — Die Wirkung der Gifte auf die wirbellosen Thiere. Stanleys neue Reise nach den Stanley-Fällen. Ein Stück aus der Literatur der Eskimo's, durch A. E. Nordenskiöld. — Deutsche Pflanzen-Namen in ihrer Ableitung. Ueber die »zweiköpfige Schlange« der Malaien. Die Ringe und Monde des Saturn. Zur Theorie der Aberration des Lichtes. Die kleinen Feinde d. Rosen-Sträucher. Die Natur d. Kaukasus. Ueber die Unfruchtbarkeit d. wild wachsenden Epheus. Entnationalisirungen in neueren Zeiten. Die Mineralpro-

7026.  
Feb. 4. 1886

# Archiv

for

# Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

**Sophus Lie, Worm-Müller og G. O. Sars.**

---

Tiende Bind. Tredie Hefte.



**Kristiania.**

Førlagt af Alb. Cämmermeyer.

November 1885.

## Avertissements.

**La nature.** *Revue des sciences et de leurs applications aux arts et l'industrie.* Journal hebdomadaire illustré. Rédacteur en chef: *Gaston Tissandier.* Pris pr. Aarg. Kr. 26,00. *Indh:* Avertisseurs d'incendie de la ville de Paris (système Petit). La distribution d'énergie électrique par transformateurs. Utilisation des fruits et des graines dans la passementerie. Distributeur automatique de cartes postales et d'enveloppes timbrées. — La telpher line de Glynde. La phaeton à vapeur. Nouveau viaduc de la Tay, l'outillage de la fondation des piles. — L'électricité à la Salpêtrière. Le camp retranché d'Anvers. Ballons captifs transportables pour le service des armées. Nouveau procédé pour éviter les collisions contre les icebergs en temps de brouillard. Indicateur-enregistreur électrique de niveau à distance; système Parenthou. L'audition colorée. Statistique des coups de foudre, en Bavière. Le chemin de fer de Costa-Rica. Vitesse des vélocipèdes. Le coendou à queue prenante de l'aquarium du Havre. Le Brocken et les mines du Harz. Ventilateur d'aération actionnés par l'électricité. Utilisation de la chaleur solaire pour l'élévation des eaux. Le réseau télégraphique pneumatique à Paris. Les transports militaires par chemins de fer. Le nouveau pont-route de Porto. Le rapport du dr. Straus sur choléra de Toulon. L'exploitation du diamant au Brésil. Les éclairs; observations météorologiques. Voiture à vapeur. Les illusions d'optique et la prestidigitation. La construction des chemins de fer aux Etats-Unis. Les diamants de la couronne de France. Les postes et télégraphes en France. Chemin de fer monorail aérien, système Duchamp. Le cholera en 1884. La lumière électrique à domicile dans la ville de Colchester. Les oiseaux des grandes villes. Les bains publics à bon marché. Le canal du Danube à l'Elbe. Les grands vins de Champagne. Chemin de fer monorail de m. Lartigue. Plume électrique. Artillerie système de Bange. — Bibliographie. Revue de l'étranger. Chronique. Nécrologie. Academie des sciences. Sociétés savantes. La science pratique. Boîte aux lettres. Recettes et procédés utiles. Bulletin météorologique de la semaine.

**Die Natur.** *Zeitung zur Verbreitung, naturwissenschaftl. Kenntniss u. Naturanschauung für Leser aller Stände.* Organ d. »Deutschen Humboldt-Vereins«. Hrsg. v. Dr. *Karl Müller*, Halle. Pris pr. Aargang (ugentl. Nr.) Kr. 17,60. *Indh.* Die Gewitter in Belgien. Die Roscommon-Schafe in Irland. — Die Algen d. nördl. Eismeres. Die Luray-Höhle. — Sanitas-Präparate. Eine neue Rafflesia. Das älteste bekannte Landthier. — Der Bumerang d. Australier. Die indische Bisam-Spitzmaus. — Kinetische



7026  
Apr 28, 1886.

# Archiv

for

## Mathematik og Naturvidenskab

Udgivet

af

Sophus Lie, Worm-Müller og G. O. Sars.

---

Tiende bind. 4 hæfte.



Kristiania.

Forlagt af Alb. Cammermeyer.

Marts 1886.

## Avertissements.

**La nature.** *Revue des sciences et de leurs applications aux arts et l'industrie.* Journal hebdomadaire illustré. Redacteur en chef: *Gaston Tissandier.* Pris pr. Aarg. Kr. 26,00. *Indh:* Le laboratoire Arago. La fabrication des plaques sèches photographiques au gélatinobromure d'argent. Exposition de l'outillage des travaux publics. — Le téléphone Colson. Lettres d'Amérique. Le bureau Veritas. L'aérostat dirigeable. Le timbre et la couleur. Les canots pliants de Berthon. — Les Dinocératidés du Wyoming. L'affaissement du pont-neuf, à Paris. Le lucigène. Une sépulture préhistorique. Allumoirs électriques au 18ème siècle. Les ciments de la Porte-de-France. La Nyctéribie. — La traction électrique sur le chemin de fer aérien de New-York. »Encartense électrique«. Le scarabée éléphant. Le code des signaux de chemins de fer. Nouvel équatorial d'amateur. — La locomotive à soude, système Honingmann. Aroïdées ornamentales. Baromètre enregistreur. Les habitants de Mars. Expédition Lemström en Finlande. — La voiture à vapeur. Bascule à tirelire de m. Evéritt. La photographie astronomique à l'Observatoire de Paris. — Sépultures mérovingiennes. Fabrication mécanique des cartouches. Eclairage électrique à distance, à Québec. Nouveaux médicaments: l'hopéine et l'hyponé. Résistance vitale des poissons.

**Die Natur.** *Zeitung zur Verbreit. naturwissenschaftl. Kenntniss u. Naturanschauung für Leser aller Stände.* Organ d. »Deutschen Humboldt-Vereins«. Hrsg. v. Dr. *Karl Müller,* Halle. Pris pr. Aargang (ugentl. Nr.) Kr. 17,60. *Indh.* Salamandra maculosa. Die Erosion d. Niagara-Fälle. — Deutsche Pflanzen-Namen in ihrer Ableitung. Der Wal-fisch-Fänger Svend Foyn u. seine Fabrik. — Ueber Relief Formen d. Erde. Kreuz u. Quer durch Siebenbürgen. Wildschweine v. Borneo — Das Edelweiss im Handel. Der Ursprung d. Petroleums. Das Kameel in Australien. D. Lebens-Agens im menschlichen Organismus. D. Pulsationen d. Erde. — Venus Vorübergänge u. d. Sonnen-Entfernung. Zur Geologie d. Hudsons-Bai u. Nord-Kanadas. Sahara-Meer in seinen letzten Zugen. — Die Oster-Insel. Ein Blick auf d. Zukunft d. Elektrotechnik. Geysir-Gebiete d. Erde. — Norwegische Nordsee-Expeditionen v. 1876–78. D. künstliche Indigo. Einwirkung Nord-Amerikas auf d. Gewerbe-Technik. Milch u. Blut. — Der Kongo v. H. H. Johnston. Kapitän Haussens am oberen Kongo. Der Venus-Mond. Ein Gang durch die Fischhalle Messinas. — Die Geburtshelfer-Kröte (*Alytes obstetricans*). Holzschuh u. Schwarzbrot. Zur Kenntniss d. Golfstromes. — Die Meridian-Konferenz in Washington. Ein Blick in d.







3 2044 106 230 204

